

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

**Ю. В. Мастиновський,
Д. І. Анпілогов**

**Математичні поняття,
визначення, теореми і формули
(довідковий посібник)**

Запоріжжя
ЗНТУ
2015

УДК 519.8(075.8)
ББК 22.18я73
М 32

*Рекомендовано до видання вченою радою ЗНТУ
(протокол № 4 від 01.12.2014 р.)*

Рецензенти:

В. З. Гришак — доктор технічних наук, професор, академік вищої школи України, завідувач кафедри прикладної математики і механіки Запорізького національного університету

Мастиновський Ю. В., Анпілогов Д. І.

М 32 Математичні поняття, визначення, теореми і формули (довідковий посібник). / Ю. В. Мастиновський, Д. І. Анпілогов. — Запоріжжя : ЗНТУ, 2015. — 171 с.

В довідковому посібнику представлено основні поняття, визначення, теореми і формули з різних розділів елементарної і вищої математики у відповідності з програмою математичної підготовки студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Довідковий посібник дозволяє ознайомитись з основними поняттями (чи відновити їх в пам'яті), отримати фактичну довідку з написання формули та умов її застосовності.

Для студентів вищих технічних навчальних закладів усіх форм навчання і інженерно-технічних робітників.

Друкується в авторській редакції.

УДК 519.8(075.8)
ББК 22.18я73

© Мастиновський Ю. В., 2015

© Анпілогов Д. І., 2015

З М І С Т

Передмова	10
1 Елементарна математика (алгебра, геометрія, тригонометрія)	11
1.1 Дійсні числа. Алгебра	11
1.1.1 Абсолютна величина (модуль) дійсного числа	11
1.1.2 Дроби. Відсотки. Пропорції	12
1.1.3 Степені і логарифми	12
1.1.4 Арифметична і геометрична прогресії	13
1.1.5 Факторіал	14
1.1.6 Комбінаторика (розміщення, перестановки, поєднання)	14
1.1.7 Біном Ньютона	14
1.1.8 Формули скороченого множення	15
1.1.9 Квадратне рівняння	15
1.2 Геометрія	16
1.2.1 Трикутники. Площа трикутника	16
1.2.2 Співвідношення між елементами трикутника	16
1.2.3 Рівносторонній трикутник	17
1.2.4 Прямокутний трикутник	17
1.2.5 Чотирикутники	17
1.2.6 Багатокутники	18
1.2.7 Окружність і коло. Сегмент і сектор	18
1.2.8 Призма. Піраміда. Правильні багатогранники	19

1.2.9	Циліндр. Конус	20
1.2.10	Сфера і куля	20
1.3	Тригонометрія	20
1.3.1	Деякі значення тригонометричних функцій	20
1.3.2	Парність і періодичність тригонометричних функцій	21
1.3.3	Формули зведення	21
1.3.4	Основна тригонометрична тотожність і її наслідки	22
1.3.5	Формули додавання	22
1.3.6	Тригонометричні функції подвійних і половинних кутів	22
1.3.7	Перетворення суми на добуток	23
1.3.8	Перетворення добутку на суму	23
1.3.9	Обернені тригонометричні функції	23
1.3.10	Елементарні тригонометричні рівняння . . .	24
1.4	Комплексні числа	24
1.4.1	Визначення і властивості	24
1.4.2	Дії над комплексними числами	25

2 Лінійна алгебра. Векторна алгебра

	і аналітична геометрія	26
2.1	Лінійна алгебра	26
2.1.1	Визначники і системи лінійних алгебраїчних рівнянь	26
2.1.2	Матриці	28
2.2	Векторна алгебра	29
2.2.1	Лінійні операції над векторами	29
2.2.2	Координати векторів	30
2.2.3	Скалярний добуток	31
2.2.4	Векторний добуток	31
2.2.5	Мішаний добуток	32
2.3	Аналітична геометрія	32
2.3.1	Пряма на площині	32
2.3.2	Площина в просторі	34
2.3.3	Пряма в просторі	35
2.3.4	Плоскі криві другого порядку	35
2.3.5	Поверхні другого порядку	36

3	Диференціальне числення	37
	функцій однієї змінної	37
3.1	Поняття функції	37
3.2	Основні теореми про границі	38
3.3	Важливі границі	38
3.4	Неперервність і точки розриву функції	39
3.5	Похідна функції. Правила диференціювання	40
3.6	Похідна складної функції	40
3.7	Похідна функції, оберненої до даної	41
3.8	Основні формули для знаходження похідних	41
3.9	Логарифмічне диференціювання	41
3.10	Диференціювання функцій, заданих неявно і параметрично	42
3.11	Правило Лопітала	42
3.12	Диференціал функції і його застосування до наближених обчислень	42
3.13	Теореми Ролля, Лагранжа, Коші	43
3.14	Формула Тейлора	44
3.15	Застосування похідних до дослідження функцій . .	44
4	Інтегральне числення	47
4.1	Невизначений інтеграл	47
4.1.1	Первісна. Властивості невизначеного інтегралу	47
4.1.2	Таблиця основних невизначених інтегралів .	48
4.1.3	Методи інтегрування підстановкою і частинами	49
4.1.4	Інтегрування правильних раціональних дробів	49
4.1.5	Інтегрування тригонометричних виразів . .	50
4.1.6	Інтегрування ірраціональних функцій	51
4.2	Визначений інтеграл і його застосування	52
4.2.1	Визначення і властивості визначеного інтегралу	52
4.2.2	Методи обчислення визначених інтегралів	53
4.2.3	Невласні інтеграли	54

4.2.4	Геометричні застосування визначеного інтегралу	55
4.2.5	Фізичні застосування визначеного інтегралу	57
5	Диференціальне числення функцій багатьох змінних	59
5.1	Визначення і неперервність функції двох змінних	59
5.2	Частинні похідні і повний диференціал	60
5.3	Застосування диференціалу до наближених обчислень	61
5.4	Диференціювання складних і неявно заданих функцій	61
5.5	Дотична площина і нормаль до поверхні	62
5.6	Похідні і диференціали вищих порядків	62
5.7	Похідна за напрямом. Градієнт	63
5.8	Екстремум функції двох змінних	64
5.9	Формула Тейлора	65
6	Звичайні диференціальні рівняння (ДР)	66
6.1	ДР першого порядку	66
6.1.1	Загальні поняття	66
6.1.2	ДР з розділеними змінними	67
6.1.3	Однорідні ДР	67
6.1.4	Лінійні ДР. Рівняння Бернуллі	68
6.1.5	ДР в повних диференціалах	70
6.1.6	Числове розв'язання ДР методом Ейлера . .	70
6.2	ДР вищих порядків	71
6.2.1	Основні поняття	71
6.2.2	ДР, які допускають зниження порядку . . .	72
6.2.3	Лінійні однорідні ДР другого порядку з постійними коефіцієнтами	73
6.2.4	Лінійні неоднорідні ДР другого порядку з постійними коефіцієнтами	73
6.2.5	Метод Лагранжа	75
7	Числові і степеневі ряди	77
7.1	Числові ряди	77
7.1.1	Нескінченний ряд і його збіжність	77
7.1.2	Ознаки збіжності рядів з додатними членами	78

7.1.3	Ознака Лейбніца збіжності знакозмінних рядів	79
7.1.4	Ознаки Даламбера і Коші збіжності знакозмінних рядів	81
7.2	Степеневі ряди	81
7.2.1	Інтервал і радіус збіжності. Властивості степеневих рядів	81
7.2.2	Ряд Тейлора	82
7.2.3	Розв'язання диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів	83
7.2.4	Наближене інтегрування за допомогою рядів	84
8	Ряди Фур'є і інтеграл Фур'є	85
8.1	Ряди Фур'є періоду $2l$	85
8.2	Ряд Фур'є для парних і непарних функцій періоду $2l$	86
8.3	Інтеграл Фур'є	87
9	Кратні, криволінійні і поверхневі інтеграли.	
	Елементи теорії поля	88
9.1	Кратні інтеграли	88
9.1.1	Визначення і обчислення подвійного інтегралу	88
9.1.2	Застосування подвійних інтегралів	91
9.1.3	Потрійний інтеграл	92
9.1.4	Потрійний інтеграл в циліндричних і сферичних координатах . .	93
9.1.5	Застосування потрійних інтегралів	94
9.2	Криволінійний інтеграл	95
9.2.1	Криволінійний інтеграл I-го роду (за довжиною дуги)	95
9.2.2	Криволінійний інтеграл II-го роду (за координатами)	96
9.2.3	Формула Гріна	97
9.2.4	Застосування криволінійних інтегралів . . .	98
9.3	Поверхневі інтеграли	99
9.3.1	Поверхневі інтеграли I-го роду (за площею поверхні)	99

9.3.2	Поверхневі інтеграли II-го роду (за координатами)	100
9.3.3	Формули Стокса і Остроградського-Гаусса .	101
9.3.4	Елементи теорії векторного поля	102
9.3.5	Оператор Гамільтона і його застосування . .	104
10	Функції комплексного змінного	106
10.1	Основні визначення	106
10.2	Диференціювання і інтегрування функцій комплексного змінного	107
10.3	Степеневі ряди. Ряди Тейлора і Лорана	109
10.4	Особливі точки аналітичних функцій. Лишки . . .	111
10.5	Застосування лишків до обчислення контурних інтегралів	113
11	Операційне числення	114
11.1	Визначення і властивості перетворення Лапласа . .	114
11.2	Зображення основних елементарних функцій . . .	117
11.3	Формули обернення. Теореми розкладання	117
11.4	Застосування операційного числення до розв'язування деяких диференціальних і інтегральних рівнянь	118
12	Елементи теорії ймовірностей	120
12.1	Випадкова подія і її ймовірність	120
12.2	Додавання і множення ймовірностей	121
12.3	Формула повної ймовірності. Формула Бейєса	122
12.4	Схема незалежних випробувань. Формула Бернуллі	122
12.5	Випадкові величини і закони їх розподілу	123
12.6	Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини	124
12.7	Приклади законів розподілу	125
12.7.1	Рівномірний розподіл	125
12.7.2	Геометричний розподіл	126
12.7.3	Експоненціальний розподіл	126
12.7.4	Біноміальний закон розподілу	127

12.7.5 Закон Пуассона	128
12.7.6 Локальна теорема Муавра-Лапласа. Функція Гаусса	129
12.7.7 Нормальний закон розподілу і функція Лапласа	129
12.8 Закон великих чисел	131
12.9 Системи випадкових величин. Кореляційний момент	132
12.10 Лінії регресії. Кореляція	134
13 Елементи математичної статистики	136
13.1 Попередній аналіз статистичних рядів	136
13.2 Побудова довірчих інтервалів для оцінок параметрів нормального розподілу	138
13.3 Перевірка статистичних гіпотез. Критерій Пірсона χ^2	140
13.4 Парна лінійна регресія	141
14 Основи дискретної математики	143
14.1 Множини. Дії над множинами. Відношення	143
14.2 Комбінаторика	147
14.3 Математична логіка	148
14.4 Булеви функції	150
14.4.1 Основні визначення	150
14.4.2 Стандартні вирази булевих функцій	152
14.4.3 Приклад застосування булевих функцій	157
Алфавітний покажчик	160
Бібліографічний список	170

Передмова

Область використання математики і математичних методів в технічних науках неперервно розширюється. Без знання основних термінів, понять, визначень і формул читання технічної літератури, розв'язання різних науково-технічних задач є неможливим.

Даний довідковий посібник дозволяє отримати найнеобхідніші теоретичні відомості (чи поновити їх в пам'яті) з елементарної математики і основних розділів вищої математики: лінійної і векторної алгебри, аналітичної геометрії; диференціального і інтегрального числення; функцій багатьох змінних; звичайних диференціальних рівнянь; рядів; кратних, криволінійних і поверхневих інтегралів; теорії поля; теорії функцій комплексної змінної; операційного числення; теорії ймовірностей і математичної статистики; дискретної математики.

Це коло питань вищої математики, які входять до програми фундаментальної математичної підготовки студентів технічних вишів, розосереджено за декількома джерелами, що утруднює отримання довідки при засвоєнні теоретичного матеріалу і розв'язуванні задач.

Основні положення теорії і формули наводяться в доступному для огляду і незахаращеному деталям вигляді. Позначення, прийняті в довідковому посібнику, відповідають позначенням, прийнятим в більшості підручників з вищої математики і технічній літературі. Доведення теорем і виводи формул в даному довіднику відсутні; читач може знайти їх в підручниках з вищої математики (включаючи спеціальні розділи).

Для зручності користування довідковим посібником наводиться детальний зміст і алфавітний покажчик російською мовою.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей вишів усіх форм навчання, а також інженерно-технічних робітників і осіб, які бажають самостійно поповнити або відновити свої знання з математики.

1

Елементарна математика (алгебра, геометрія, тригонометрія)

1.1 Дійсні числа. Алгебра

1.1.1 Абсолютна величина (модуль) дійсного числа

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

Якщо a і b – два дійсних числа, то

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|; \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|};$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (\text{нерівність трикутника}).$$