МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

Д. І. Анпілогов, Н. В. Сніжко

# Ряди ФУР'Є
## вибрані питання

Запоріжжя
ЗНТУ
2014

УДК 517.518.45
ББК 22.161.5
А 69

Рекомендовано до видання Вченою радою ЗНТУ
(протокол №3 від 03.11.2014)

Р е ц е н з е н т и:

*Л. М. Карпуков* — завідувач кафедри захисту інформації Запорізького національного технічного університету, доктор технічних наук, професор

*Г. В. Корнич* — завідувач кафедри системного аналізу та обчислювальної математики Запорізького національного технічного університету, доктор фізико-математичних наук, професор

**Анпілогов Д. І., Сніжко Н. В.**

А 69 **Ряди Фур'є. Вибрані питання:** навчальний посібник / Д. І. Анпілогов, Н. В. Сніжко. — Запоріжжя : Акцент Інвест-трейд, 2014. — 91 с.

В доступній формі викладено основи теорії рядів Фур'є. Текст орієнтовано на студентів радіотехнічних спеціальностей. Відповідно до цього дібрано приклади застосування цих рядів.

Значна увага приділяється використанню засобів середовища MATLAB для візуалізації результатів розрахунків.

Для більш глибокого сприйняття матеріалу запропоновано варіанти завдань для самостійного виконання.

**УДК 517.518.45**
**ББК 22.161.5**

# *З М І С Т*

# Вступ

Ряди Фур'є є різновидом функціональних рядів. Доданки таких рядів – тригонометричні функції кратних частот, тому за допомогою рядів Фур'є можна представити будь-який періодичний сигнал або процес (принаймні такий, для якого можна побудувати фізичну реалізацію). З цього випливає важлива роль, яку апарат рядів Фур'є відіграє при дослідженні сигналів методами гармонічного аналізу. Одним з важливих прикладів такого дослідження є аналіз розв'язків диференціальних рівнянь вимушених коливань, які відбуваються під дією довільної періодичної змушуючої сили.

Крім того, аргументу функції можна надати сенс просторової координати. Тому ряди Фур'є зручно застосовувати при описанні просторово періодичних структур – випромінюючих антен (фазові антенні решітки), кристалічних ґраток і т.ін. При цьому значно спрощується розв'язування низки задач теорії дифракції.

Досить потужним виявляється застосування рядів Фур'є також при розв'язуванні диференціальних рівнянь в частинних похідних (рівнянь математичної фізики). Це відомі рівняння Лапласа, Пуассона, Гельмгольца (хвильове рівняння), рівняння переносу (теплопровідності, в'язкості, дифузії), та ін. Розроблено т.зв. метод Фур'є розділення змінних при розв'язуванні рівнянь такого типу.

Отже, вивчення рядів Фур'є є важливим обов'язковим елементом сучасної математичної освіти. В цій роботі викладено основи теорії рядів Фур'є та запропоновано задачі для самостійного розв'язування.

Для графічної інтерпретації отримуваних результатів нами широко використано середовище `MATLAB`, тому окремий розділ присвячено роботі в цьому середовищі і викладенню текстів програм (скриптів).

Середовище `MATLAB` містить вбудовані спеціалізовані функції для роботи з коефіцієнтами Фур'є у комплексній формі, але ми вважаємо за краще при першому знайомстві з предметом уникнути цього питання.

Зауважимо, нарешті, викладення орієнтовано на студентів радіотехнічних спеціальностей, звідки і випливає специфіка обраних для розглядання прикладів.

# 1

# Теоретичні відомості

## 1.1 Гармоніки

Розглянемо деяку функцію $f = f(t)$, визначену на інтервалі $t \in [t_0; t_0 + T]$. Її можна представити у вигляді розвинення за т.зв. гармоніками – тригонометричними функціями аргументу $t$:

$$f(t) = a_0 + (a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) +$$

$$+ (a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t) + (a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t) + \cdots ,$$

або

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) . \tag{1.1}$$

Тут позначено[1]

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{1.2}$$

*Гармонікою* з номером $k$ називатимемо функцію

$$f_k(t) = a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t.$$

[1] В фізиці та техніці величину $\omega$ називають *циклічною частотою*. Якщо непорозумінь виникнути не може, зазвичай слово «циклічною» пропускають. Однак, в експерименті вимірюють іншу частоту: $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$.