

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

Д. І. Анпілогов, Н. В. Сніжко

Ряди ФУР'Є
вибрані питання

Запоріжжя
ЗНТУ
2014

УДК 517.518.45

ББК 22.161.5

А 69

Рекомендовано до видання Вченою радою ЗНТУ
(протокол №3 від 03.11.2014)

Рецензенти:

Л. М. Карпуков — завідувач кафедри захисту інформації Запорізького національного технічного університету, доктор технічних наук, професор

Г. В. Корнич — завідувач кафедри системного аналізу та обчислювальної математики Запорізького національного технічного університету, доктор фізико-математичних наук, професор

Анпілогов Д. І., Сніжко Н. В.

А 69 **Ряди Фур'є. Вибрані питання:** навчальний посібник / Д. І. Анпілогов, Н. В. Сніжко. — Запоріжжя : Акцент Інвесттрейд, 2014. — 91 с.

В доступній формі викладено основи теорії рядів Фур'є. Текст орієнтовано на студентів радіотехнічних спеціальностей. Відповідно до цього дібрано приклади застосування цих рядів.

Значна увага приділяється використанню засобів середовища MATLAB для візуалізації результатів розрахунків.

Для більш глибокого сприйняття матеріалу запропоновано варіанти завдань для самостійного виконання.

УДК 517.518.45
ББК 22.161.5

© Анпілогов Д. І., 2014

© Сніжко Н. В., 2014

© ЗНТУ, 2014

З М І С Т

Вступ	5
1 Теоретичні відомості	6
1.1 Гармоніки	6
1.2 Коефіцієнти Фур'є	8
1.2.1 Властивість синус- і косинус-компонент . . .	8
1.2.2 Знаходження коефіцієнтів Фур'є	9
1.2.3 Зміна інтервалу розкладання	11
1.3 Зауваження про збіжність	15
1.4 Розкладання за синусами і косинусами	16
1.4.1 Розкладання за синусами	16
1.4.2 Розкладання за косинусами	19
1.5 Приклади рядів Фур'є	22
1.5.1 Меандр	22
1.5.2 Імпульс у вигляді трапеції	25
2 Приклади застосування рядів Фур'є	33
2.1 Опір котушки змінному струму	33
2.2 Полірезонанс	44
2.2.1 Елементарна теорія резонансу	44
2.2.2 Випадок полігармонічного збудження	49
2.3 Дослідження RC -фільтрів	53
2.3.1 Проходження гармоніки через RC -фільтр .	54
2.3.2 Випадок довільного сигналу	63

3	Використані скрипти	66
3.1	Деякі відомості про MATLAB	66
3.2	Часткові суми меандру	68
3.3	Імпульс у вигляді трапеції	70
3.4	Розрахунок опору котушки	72
3.5	Зіставлення напруги і струму котушки	73
3.6	Розрахунок резонансної кривої	74
3.7	Розрахунок полірезонансу	75
3.8	Робота <i>RC</i> -фільтрів	75
4	Індивідуальні завдання	78
4.1	Завдання 1	78
4.2	Завдання 2	79
4.3	Завдання 3	79
4.4	Завдання 4	80
4.5	Завдання 5	81
4.6	Завдання 6	81
4.7	Завдання 7	88
	Бібліографічний список	90

Вступ

Ряди Фур'є є різновидом функціональних рядів. Доданки таких рядів – тригонометричні функції кратних частот, тому за допомогою рядів Фур'є можна представити будь-який періодичний сигнал або процес (принаймні такий, для якого можна побудувати фізичну реалізацію). З цього випливає важлива роль, яку апарат рядів Фур'є відіграє при дослідженні сигналів методами гармонічного аналізу. Одним з важливих прикладів такого дослідження є аналіз розв'язків диференціальних рівнянь вимушених коливань, які відбуваються під дією довшої періодичної змущуючої сили.

Крім того, аргументу функції можна надати сенс просторової координати. Тому ряди Фур'є зручно застосовувати при описанні просторово періодичних структур – випромінюючих антен (фазові антенні решітки), кристалічних ґраток і т.ін. При цьому значно спрощується розв'язування низки задач теорії дифракції.

Досить потужним виявляється застосування рядів Фур'є також при розв'язуванні диференціальних рівнянь в частинних похідних (рівнянь математичної фізики). Це відомі рівняння Лапласа, Пуассона, Гельмгольца (хвильове рівняння), рівняння переносу (теплопровідності, в'язкості, дифузії), та ін. Розроблено т.зв. метод Фур'є розділення змінних при розв'язуванні рівнянь такого типу.

Отже, вивчення рядів Фур'є є важливим обов'язковим елементом сучасної математичної освіти. В цій роботі викладено основи теорії рядів Фур'є та запропоновано задачі для самостійного розв'язування.

Для графічної інтерпретації отримуваних результатів нами широко використано середовище MATLAB, тому окремий розділ присвячено роботі в цьому середовищі і викладенню текстів програм (скриптів).

Середовище MATLAB містить вбудовані спеціалізовані функції для роботи з коефіцієнтами Фур'є у комплексній формі, але ми вважаємо за краще при першому знайомстві з предметом уникнути цього питання.

Зауважимо, нарешті, викладення орієнтовано на студентів радіотехнічних спеціальностей, звідки і випливає специфіка обраних для розглядання прикладів.

1

Теоретичні відомості

1.1 Гармоніки

Розглянемо деяку функцію $f = f(t)$, визначену на інтервалі $t \in [t_0; t_0 + T]$. Її можна представити у вигляді розвинення за т.зв. гармоніками – тригонометричними функціями аргументу t :

$$f(t) = a_0 + (a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) + \\ + (a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t) + (a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t) + \dots,$$

або

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t). \quad (1.1)$$

Тут позначено¹

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.2)$$

Гармонікою з номером k називатимемо функцію

$$f_k(t) = a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t.$$

¹В фізиці та техніці величину ω називають *циклічною частотою*. Якщо непорозумінь виникнути не може, зазвичай слово «циклічною» пропускають. Однак, в експерименті вимірюють іншу частоту: $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$.