

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

Ю. В. Мастиновський,
В. С. Левада,
Д. І. Анпілогов

ОСНОВИ лінійної алгебри та аналітичної геометрії

навчальний посібник

Запоріжжя
СТАТУС
2017

УДК 512(075.8) + 514(075.8)
М 32

*Рекомендовано до видання вченою радою ЗНТУ
(протокол № 10 від 09.06.2017 р.)*

Рецензенти:

В. І. Пожусв — доктор технічних наук, професор, професор кафедри механіки Запорізького національного технічного університету

Г. В. Корніч — доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри системного аналізу та обчислювальної математики Запорізького національного технічного університету

Мастиновський Ю. В., Левада В. С., Анпілогов Д. І.

М 32 Основи лінійної алгебри та аналітичної геометрії :
навч. посібник / Ю. В. Мастиновський, В. С. Левада,
Д. І. Анпілогов. — Запоріжжя : СТАТУС, 2017. — 268 с. —
(Наукова книга).

ISBN 978-617-7353-58-III

В посібнику представлено основні положення лінійної алгебри і аналітичної геометрії у відповідності з програмою математичної підготовки студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Розглянуто базові задачі аналітичної геометрії та алгоритми їх розв'язання. Дібрано числові дані, зручні для реалізації цих алгоритмів. Крім того, наведено інші задачі для самостійного розв'язування. Завдання розроблено у кількості 15 варіантів, що представляється достатнім для проведення групових занять.

Для проведення групових занять зі студентами вищих технічних навчальних закладів усіх форм навчання. Може бути корисним для аспірантів і інженерно-технічних робітників.

Друкується в авторській редакції.

УДК 512(075.8)+514(075.8)

© Ю. В. Мастиновський, 2017

© В. С. Левада, 2017

© Д. І. Анпілогов, 2017

ISBN 978-617-7353-58-III

З М І С Т

Вступ	7
I Основи лінійної алгебри	8
1 Визначники та системи лінійних рівнянь	9
1.1 Системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими. Формули Крамера. Визначники другого порядку	9
1.2 Визначники третього порядку. Властивості визначників	11
1.2.1 Визначники третього порядку	11
1.2.2 Властивості визначників	11
1.2.3 Системи однорідних лінійних рівнянь	15
1.2.4 Метод Гаусса розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)	16
2 Елементи векторної алгебри	18
2.1 Вектори. Лінійні операції з векторами	18
2.1.1 Основні означення	18
2.1.2 Лінійні операції з векторами	19
2.1.3 Проекція вектора на вісь	20
2.2 Лінійна залежність векторів. Розкладання вектора за базисом	21
2.2.1 Теореми про лінійну залежність векторів . .	21
2.2.2 Означення базису	24
2.3 Декартові базиси	25
2.4 Радіус-вектор точки	28
2.5 Поділ відрізка в даному відношенні	29
2.6 Скалярний добуток векторів і його властивості . .	29
2.7 Векторний добуток векторів і його властивості . .	33

2.8	Про заборону ділити на вектор	36
2.9	Векторний добуток двох векторів, заданих координатами	37
2.10	Мішаний добуток трьох векторів	38
2.11	Мішаний добуток у координатах	39
3	Матриці і СЛАР	41
3.1	Матриці	41
3.2	Дії над матрицями і їх властивості	42
3.3	Обернена матриця	47
3.4	Ранг матриці	50
3.5	СЛАР	53
3.5.1	Матрична форма СЛАР	54
3.5.2	Матричний метод розв'язування СЛАР . . .	55
3.5.3	Правила Крамера	56
3.5.4	Приклади методу Гаусса	57
3.5.5	Теорема Кронекера-Капеллі	62
3.5.6	Однорідні СЛАР	64
4	Простори і оператори	68
4.1	Поняття про лінійні простори	68
4.2	Перетворення координат вектора	74
4.3	Приклад перетворення координат вектора	80
4.4	Поняття про евклідові простори	82
4.5	Оператори	91
4.5.1	Поняття оператора	91
4.5.2	Лінійні оператори	93
4.5.3	Матриця лінійного оператора	94
4.5.4	Двовимірний оператор повороту	100
4.5.5	Тривимірний оператор повороту	102
4.5.6	Властивості операторів	107
4.5.7	Перетворення матриці оператора при переході до нового базису	111
4.5.8	Власні вектори і власні числа	114
4.5.9	Застосування власних векторів	118
4.5.10	Симетричні оператори	126
5	Квадратичні форми	138
5.1	Основні відомості	138
5.2	Означення квадратичної форми	140

5.3	Перетворення матриці квадратичної форми	142
5.4	Метод ортогонального перетворення	143
5.5	Метод Лагранжа	150
5.6	Закон інерції	156
II	Основи аналітичної геометрії	160
6	Метод аналітичної геометрії	161
7	Пряма на площині	164
7.1	Загальне рівняння прямої	164
7.2	Умови паралельності і перпендикулярності прямих	166
7.3	Нормальне рівняння прямої. Відхилення і відстань точки від прямої	167
7.4	Канонічне і параметричне рівняння прямої	171
7.5	Рівняння прямої, що проходить через задану точку. Пучок прямих	172
7.6	Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Рівняння прямої у відрізках на осях	175
7.7	Кут між двома прямими	176
8	Площина і пряма у просторі	180
8.1	Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора. Загальне рівняння площини	180
8.2	Нормальне рівняння площини	183
8.3	Рівняння площини, яка проходить через три точки. Рівняння площини у відрізках на осях . . .	186
8.4	Кут між двома площинами	189
8.5	Рівняння прямої, що проходить через задану точку паралельно заданому вектору. Параметричне рівняння прямої	190
8.6	Пряма як перетин двох площин	192
8.7	Кут між двома прямими. Умови перетину двох прямих	196
8.8	Перетин прямої і площини. Кут між прямою і площиною	199
9	Плоскі криві другого порядку	202
9.1	Коло	202

9.2	Еліпс	205
9.3	Гіпербола	209
9.4	Парабола	212
10	Поверхні другого порядку	214
10.1	Еліптичний випадок	215
10.2	Гіперболічні випадки	215
10.3	Параболічні випадки	219
10.4	Циліндри	221
III	Індивідуальні завдання	224
11	Задачі з відомими розв'язками	225
11.1	Елементарні дії з векторами	225
11.1.1	Обчислення відстаней і кутів	225
11.1.2	Поділ відрізка в заданому відношенні	227
11.1.3	Знаходження висоти трикутника	228
11.1.4	Знаходження бісектриси трикутника	230
11.2	Площина і пряма у просторі	232
11.2.1	Побудова рівняння площини, що проходить через задану точку і має задану нормаль	232
11.2.2	Побудова рівняння площини, що проходить через три точки	233
11.2.3	Обчислення відстані між точкою і площиною	235
11.2.4	Обчислення відстані між двома паралельними площинами	237
11.2.5	Знаходження точки, симетричної даній точці відносно даної площини	240
11.2.6	Відстань між точкою і прямою	242
11.2.7	Знаходження точки, симетричної даній точці відносно даної прямої	244
11.2.8	Взаємне розташування прямих	246
11.2.9	Знаходження відстані між мимобіжними прямими	251
12	Задачі для індивідуальної роботи	256

Вступ

Посібник містить відомості з теорії матриць та визначників, теорії систем лінійних алгебраїчних рівнянь. У ньому детально викладена векторна алгебра. Розглянуті основні поняття, що стосуються лінійних просторів, зокрема евклідових. Вичерпно викладено методику діагоналізації матриць симетричних операторів. Значна увага приділена задачам аналітичної геометрії на площині та у просторі.

Посібник має відносно великий обсяг; це зумовлено значною кількістю прикладів, які ілюструють теоретичний матеріал.

Окремий розділ присвячено формуванню навичок роботи з трійками чисел, які представляють вектори. Запропоновано типові елементарні задачі аналітичної геометрії, до яких наведено загальні розв'язки у вигляді послідовності дій (списку пунктів). Фіксація результатів виконання цих пунктів у відповідних таблицях дозволяє побудувати розв'язок, а надлишковість таблиць – здійснити його перевірку. Вихідні дані цих задач дібрано так, щоб забезпечити зручність розрахунків, оскільки головна мета цього розділу – навчитись правильно розпоряджатись вихідними даними, а не концентруватись на розрахунковому боці розв'язку.

Запропоновано також задачі для індивідуальної роботи (кожна – в 15 варіантах), кількість яких дозволяє тематично охопити обсяг посібника.

В посібнику прийнято наступні умовні позначення. Означення супроводжуються символом $\blacklozenge$. Формулювання теорем супроводжуються чорним квадратом $\blacksquare$. Доведення теорем містяться між білими квадратами: $\square$ *текст доведення* $\square$, а приклади – між білими трикутниками: $\triangleleft$ *текст прикладу* $\triangleright$.

Частина I

Основи лінійної алгебри

1

Визначники та системи лінійних рівнянь

1.1 Системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими. Формули Крамера. Визначники другого порядку

Розглянемо систему

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \quad (1.1)$$

Коефіцієнти a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , b_1 , b_2 – задані; b_1 , b_2 – вільні члени; індекси коефіцієнтів при невідомих – перший є номером рядку (рівняння), другий – номером стовпця (невідомого).

Розв'яжемо систему (1.1). Помножимо перше рівняння системи на $a_{22} \neq 0$, а друге – на $-a_{12} \neq 0$ і додамо отримані рівняння. Матимемо:

$$(a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12})x = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}. \quad (1.2)$$

Аналогічно помножимо перше рівняння (1.1) на $-a_{21} \neq 0$, а друге – на $-a_{12} \neq 0$ і додамо їх. Дістанемо:

$$(a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12})y = b_2 \cdot a_{11} - b_1 \cdot a_{21}. \quad (1.3)$$