

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Ю. В. Мастиновський, Г. А. Шишканова

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих технічних навчальних закладів*

Запоріжжя • ЗНТУ • 2012

УДК 517.53
ББК 22.161.5
М 32

*Розповсюджувати та тиражувати без офіційного дозволу
ЗНТУ забороняється*

*Гриф надано Міністерством освіти і науки України
(лист №1/11-101 від 06 січня 2011 року)*

Рецензенти:

*Пожуєв В. І., доктор фізико-математичних наук, професор
Запорізької державної інженерної академії
Гоменюк С. І., доктор технічних наук, професор, Запорізько-
го національного університету
Піза Д. М., доктор технічних наук, професор, Запорізького
національного технічного університету*

Мастиновський Ю. В.

М 32 Теорія функцій комплексної змінної: Навчальний посібник /
Ю. В. Мастиновський, Г. А. Шишканова. — Запоріжжя : ЗНТУ,
2012. — 160 с.

ISBN 978-617-529-043-9

У посібнику викладено спеціальний розділ вищої математики «Теорія функцій комплексної змінної», який відповідно до кредитно-модульної технології навчання вивчається у другому або третьому семестрі.

Разом зі стислим викладенням теорії, яке орієнтовано на практичне використання, посібник містить приклади розв'язків типових завдань, завдання для самостійної роботи з відповідями, індивідуальні домашні завдання, теоретичні питання, а також варіанти модульних тестових завдань з відповідями.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання вищих навчальних закладів.

УДК 517.53
ББК 22.161.5

ISBN 978-617-529-043-9

© Запорізький національний
технічний університет
(ЗНТУ), 2012

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1 КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА.....	7
1.1 Поняття комплексного числа	7
1.2 Дії над комплексними числами.....	11
1.3 Зображення комплексних чисел на сфері. Нескінченно віддалена точка	16
1.4 Питання для самостійної перевірки знань	17
1.5 Завдання для самостійної роботи студентів.....	17
2 ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ.....	19
2.1 Поняття функції комплексної змінної	19
2.2 Основні елементарні функції комплексної змінної.....	20
2.2.1 Показникова функція $w = e^z$	20
2.2.2 Логарифмічна функція $w = \operatorname{Ln} z$	21
2.2.3 Тригонометричні функції комплексної змінної	22
2.2.4 Обернені тригонометричні функції комплексної змінної ...	23
2.2.5 Гіперболічні функції комплексної змінної	25
2.2.6 Обернені гіперболічні функції комплексної змінної	25
2.2.7 Загальна степенева функція.....	26
2.3 Границя функції комплексної змінної в точці	27
2.4 Неперервність функції комплексної змінної	28
2.5 Диференціювання функцій комплексної змінної	28
2.6 Диференціал функції комплексної змінної.....	32
2.7 Зв'язок аналітичних функцій з гармонічними	33
2.8 Геометричний зміст аргументу та модуля похідної.....	34
2.9 Питання для самостійної перевірки знань	35
2.10 Завдання для самостійної роботи студентів.....	36
3 ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ	38
3.1 Контурний інтеграл	38
3.2 Властивості контурних інтегралів	40
3.3 Обчислення контурних інтегралів	41
3.4 Теорема Коші для однозв'язної області	43
3.5 Теорема Коші для багатозв'язної області	45
3.6 Незалежність контурного інтегралу від шляху інтегрування ..	48

3.7 Невизначений інтеграл.....	49
3.8 Інтегральна формула Коші	51
3.9 Питання для самостійної перевірки знань	53
3.10 Завдання для самостійної роботи студентів.....	54
4 РЯДИ В КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ	55
4.1 Числові ряди.....	55
4.2 Функціональні ряди.....	57
4.3 Степеневі ряди	59
4.4 Ряд Тейлора.....	61
4.5 Ряд Лорана.....	64
4.6 Нулі аналітичної функції	69
4.7 Ізольовані особливі точки.....	70
4.8 Поведінка функції в околі нескінченно віддаленої точки	73
4.9 Питання для самостійної перевірки знань	76
4.10 Завдання для самостійної роботи студентів.....	76
5 ЛИШКИ ФУНКЦІЙ	79
5.1 Лишок функції у скінченній ізольованій особливій точці.....	79
5.2 Лишок функції у скінченному полюсі.....	80
5.3 Лишок функції у нескінченно віддаленій точці	81
5.4 Застосування лишків до обчислення інтегралів	82
5.5 Питання для самостійної перевірки знань	87
5.6 Завдання для самостійної роботи студентів.....	88
6 ІНДІВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ	90
6.1 Завдання до розділу 1	90
6.2 Завдання до розділу 2.....	94
6.3 Завдання до розділу 3.....	96
6.4 Завдання до розділу 4.....	100
6.5 Завдання до розділу 5.....	102
7 ВАРІАНТИ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ ДО МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ.....	106
7.1 Теоретичні завдання на модульний контроль.....	106
7.2 Практичні завдання на модульний контроль	139
7.3 Відповіді.....	158
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	159

ВСТУП

У посібнику викладено розділ вищої математики «Теорія функцій комплексної змінної» (ТФКЗ), матеріал якого згідно кредитно-модульної технології навчання, належить до окремого змістовного модулю.

Вивчення ТФКЗ пов'язане з опануванням інших загальнонаукових та спеціальних дисциплін, тому що вона є теоретичною основою таких курсів, як «Теоретичні основи електротехніки», «Теоретичні основи радіотехніки», «Теорія автоматичного керування» та інші.

Теорія функцій комплексної змінної широко використовується для розв'язання інженерних задач. Цей курс є важливою дисципліною як для математики та різних прикладних математичних дисциплін – аеро- та гідродинаміки, теорії пружності, небесної механіки та ін., так і для радіо та електротехніки (наприклад, при аналізі та синтезі у теорії електро- та радіо ланцюгів змінного току, та теорії електромагнітного поля).

Мета даного посібника – допомогти студентам у засвоєнні головних тем курсу ТФКЗ, вивчити базові поняття та формули, сформувати первинні навички математичного дослідження, оволодіти основними методами для опрацювання математичних моделей, пов'язаних із подальшою практичною діяльністю фахівців.

Посібник складений у відповідності до програми з курсу теорії комплексної змінної багатоступеневої підготовки фахівців і призначений для студентів заочної (дистанційної) форми навчання, та для самостійної роботи студентів денної форми навчання, що навчаються на факультетах радіоприладобудівному, інформатики і обчислювальної техніки та інших.