

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

Ю. В. Мاستиновський,
Д. І. Анпілогов, Т. І. Левицька

КОРОТКИЙ КУРС
МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Запоріжжя
ЗНТУ
2014

УДК 519.8(075.8)
ББК 22.18я73
М 32

*Рекомендовано до видання вченою радою ЗНТУ
(протокол № 8 від 24.03.2014)*

Рецензенти:

В. З. Гришак — доктор технічних наук, професор, академік вищої школи України, проректор з наукової роботи та міжнародного співробітництва Запорізького національного університету;

М. С. Гамов — кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри «Міжнародні економічні відносини» Запорізького національного технічного університету;

Я. Я. Карчев — кандидат технічних наук, доцент, декан факультету статистики та економічної кібернетики Національної Академії статистики, обліку та аудиту

Мастиновський Ю. В., Анпілогов Д. І., Т. І. Левицька

М 32 Математика для економістів : конспект лекцій. /
Ю. В. Мастиновський, Д. І. Анпілогов, Т. І. Левицька. — Запоріжжя : ЗНТУ, 2014. — 228 с.

Коротко викладено основні теоретичні відомості в межах курсу «Математика для економістів» (МЕ) і наведено прості приклади для кращого їх засвоєння.

Короткий курс МЕ може слугувати загальнодоступним посібником для першого знайомства і для повторення теоретичного матеріалу МЕ студентами першого курсу усіх форм навчання.

Друкується в авторській редакції.

**УДК 519.8(075.8)
ББК 22.18я73**

© Мастиновський Ю. В., 2014
© Анпілогов Д. І., 2014
© Левицька Т. І., 2014
© ЗНТУ, 2014

З М І С Т

Вступ	8
1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА	10
1.1 Матриці	10
1.1.1 Основні поняття	10
1.1.2 Дії над матрицями	11
1.2 Визначники	13
1.2.1 Означення	13
1.2.2 Способи обчислення	13
1.2.3 Властивості визначників	15
1.3 Побудова оберненої матриці	17
1.4 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	18
1.4.1 Правило Крамера	19
1.4.2 Метод оберненої матриці	20
1.4.3 Метод Гаусса	20
1.4.4 Однорідні системи	21
1.5 Лінійні економічні моделі	21
1.5.1 Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки	21
1.5.2 Продуктивні моделі Леонтьєва	26
1.5.3 Лінійні економічні моделі: модель рівноважних цін, модель міжнародної торгівлі	29
2 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ	36
2.1 Елементарні формули	36

2.2	Використання рівнянь кривих другого порядку в економіці	39
3	ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ	41
3.1	Основні означення	41
3.2	Додавання векторів	41
3.3	Множення вектора на число	42
3.4	Скалярний добуток векторів	42
3.5	Векторний добуток векторів	43
3.6	Мішаний добуток векторів	45
3.7	Поняття про векторний базис	46
3.8	Векторні операції в координатах	49
3.8.1	Додавання векторів в координатах	49
3.8.2	Множення вектора на число	50
3.8.3	Скалярний добуток векторів в координатах	50
3.8.4	Векторний добуток векторів в координатах . .	51
3.8.5	Мішаний добуток векторів в координатах . . .	52
3.9	Елементарні застосування алгебри векторів	52
3.9.1	Розподіл відрізка в даному співвідношенні . .	52
3.9.2	Перетин медіан трикутника	53
3.9.3	Відстань між мимобіжними	56
4	АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ	60
4.1	Площина в просторі	60
4.1.1	Векторне рівняння площини	60
4.1.2	Загальне рівняння площини	61
4.1.3	Рівняння площини за трьома точками	62
4.1.4	Рівняння площини «у відрізках»	63
4.2	Пряма в просторі	64
4.2.1	Векторне рівняння прямої	64
4.2.2	Рівняння прямої у вигляді перетину двох площин	64
4.2.3	Канонічне рівняння прямої	66
4.2.4	Параметричне рівняння прямої	67
4.2.5	Переходи між формами рівняння прямої . . .	68

4.3	Застосування рівнянь площини і прямої	69
4.4	Поверхні другого порядку	73
4.4.1	Еліптичний випадок	74
4.4.2	Гіперболічні випадки	74
4.4.3	Параболічні випадки	79
4.4.4	Циліндри	80
5	ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ	83
5.1	Границі	83
5.1.1	Границя послідовності	83
5.1.2	Границя функції	85
5.1.3	Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні нескінченно малі	87
5.2	Похідна і диференціал	89
5.2.1	Основні означення	89
5.2.2	Техніка диференціювання	91
5.2.3	Диференціювання: подальші приклади	93
5.3	Повне дослідження функції	95
5.4	Використання елементів математичного аналізу в економіці	100
5.4.1	Задача про неперервне нарахування відсотків	100
5.4.2	Застосування функцій в економічній теорії	102
5.4.3	Економічний зміст похідної і деяких теорем диференціального числення	105
5.4.4	Економічний зміст теореми Ферма	108
5.4.5	Економічний зміст теореми Лагранжа	109
5.4.6	Економічний зміст опуклості функції	109
5.4.7	Економічне застосування диференціалу	110
5.4.8	Застосування формули Тейлора в економічних задачах	111
5.5	Застосування похідної в економічних дослідженнях	113
5.5.1	Еластичність і її властивості	113
6	ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ	128
6.1	Частинні похідні і диференціал	128
6.2	Подальший розвиток техніки диференціювання	129

6.2.1	Функції одного змінного, задані неявно	129
6.2.2	Функції двох змінних, задані неявно	130
6.2.3	Складні функції одного змінного	131
6.2.4	Складні функції двох змінних	131
6.3	Екстремум функції двох змінних	132
6.4	Найбільше (найменше) значення в області	135
6.5	Використання функцій багатьох змінних в економіці	135
6.5.1	Виробничі функції. Еластичності	135
6.5.2	Застосування частинних похідних. Задачі на екстремум	142
6.5.3	Метод найменших квадратів	147
7	ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ	154
7.1	Невизначений інтеграл	154
7.1.1	Означення і властивості	154
7.1.2	Табличні інтеграли	155
7.2	Основні методи інтегрування	155
7.2.1	Інтегрування частинами	155
7.2.2	Заміна змінної	156
7.2.3	Інтегрування раціональних функцій	159
7.3	Визначений інтеграл	167
7.3.1	Означення і властивості	167
7.3.2	Формула Ньютона-Лейбніца	169
7.3.3	Заміна змінної у визначеному інтегралі	170
7.3.4	Поняття про невластні інтеграли	171
7.4	Застосування визначених інтегралів в економічних задачах	174
8	РЯДИ	181
8.1	Основні означення	181
8.2	Теореми про ряди	183
8.3	Збіжність знакосталих рядів	184
8.4	Ознаки збіжності знакосталих рядів	185
8.5	Абсолютна і умовна збіжність. Теорема Лейбніца	187
8.6	Збіжність знакозмінних рядів	190
8.7	Степеневі ряди	190
8.8	Ряди Тейлора	192

9	КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА	194
9.1	Комплексні числа і дії з ними	194
9.1.1	Основні означення	194
9.1.2	Операції над комплексними числами	195
9.1.3	Три форми запису комплексного числа	197
9.1.4	Обчислення значень функцій	198
10	ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ	200
10.1	Основні означення	200
10.2	Рівняння першого порядку	201
10.2.1	Рівняння з розділеними змінними	201
10.2.2	Рівняння, які допускають розділення змінних	202
10.2.3	Лінійні рівняння першого порядку	203
10.2.4	Рівняння Бернуллі та Ріккаті	204
10.2.5	Рівняння, не розв'язані відносно похідної	205
10.3	Рівняння вищих порядків	208
10.3.1	Прості випадки зниження порядку	209
10.3.2	Лінійні рівняння вищих порядків	210
10.3.3	Однорідні лінійні рівняння з постійними коефіцієнтами	213
10.3.4	Неоднорідні лінійні рівняння з постійними коефіцієнтами	217
10.4	Диференціальні рівняння в економічних задачах	220
	Бібліографічний список	226

Вступ

Короткий курс математики для економістів (МЕ) складено у відповідності з програмою однойменного курсу багатоступеневої підготовки студентів ВНЗ, які навчаються за освітньо-професійною програмою бакалаврів напряму підготовки «Міжнародні відносини».

Курс містить матеріал, який вивчається відповідно у 1 та 2 семестрах: лінійна та векторна алгебра і аналітична геометрія; теорія границь; диференціальне числення функцій однієї змінної; диференціальне числення функцій багатьох змінних; інтегральне числення; диференціальні рівняння; ряди.

Це основні (фундаментальні) розділи математики, які застосовуються при аналізі економічних теорій і систем. Без знання математичних понять, визначень і формул читання та вивчення економічної літератури є неможливим.

За задумом авторів цей короткий курс МЕ має двояке призначення. По-перше, за його допомогою можна отримати довідку (визначення, правило, формулу, формулювання теореми). По-друге, він може слугувати загальнодоступним посібником для початкового вивчення, повторення і практичного застосування теоретичного матеріалу за даним курсом.

Основні теоретичні положення і формули надано у виді, легко доступному до огляду. Для кращого засвоєння понять і формул наводяться приклади. В деяких випадках, коли виникала необхідність обґрунтовувати важливий результат, надається виведення тієї чи іншої формули. При розв'язанні питання про те, де можна виключити доведення, а де не можна, автори керувались педагогічним досвідом. Строгі доведення, виключені в даному курсі МЕ, читач у разі необхідності може знайти в підручниках, список яких наводиться в кінці посібника. В список літератури включено лише відомі видання, які вийшли останніми роками.

Для зручності користування посібником наводиться зміст з докладною рубрикацією. Матеріал розташовано у відповідності до навчальної програми дисципліни МЕ.

Позначення, які прийнято в посібнику, відповідають загально-вживаним позначенням, які можна зустріти в більшості підручників і книг з математики.

Курс МЕ може бути використаний студентами економічних спеціальностей усіх напрямків навчання. Він також може бути корисним аспірантам і економістам-практикам, які бажають відновити свої знання з математики.

1

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1 Матриці

1.1.1 Основні поняття

Матриця – прямокутна таблиця чисел, яка містить певну кількість m рядків та певну кількість n стовпців. Числа m і n – порядки матриці. Якщо матриця є квадратною ($n = m$), кажуть, що вона – m -го порядку.

Матричний елемент матриці A , який знаходиться на перетині i -го рядка та k -го стовпця, позначають через a_{ik} . Наприклад, матриця порядку 2×3 має вигляд:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Скорочено це можна позначити так:

$$A = (a_{ik}), \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, 3.$$

Головною діагоналлю квадратної матриці m -го порядку називають сукупність $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$ усіх матричних елементів, у яких номер рядка дорівнює номеру стовпця.