МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання розрахунково-графічних робіт
з курсу “Опір матеріалів”
для студентів галузі знань “Механічна інженерія”
денної форми навчання

ІІІ семестр

2018

Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних робіт з курсу “Опір матеріалів” для студентів галузі знань “Механічна інженерія” денної форми навчання. III семестр / Укл.: В.Г. Шевченко, С.Л. Рягін, О.Г. Попович, О.С. Омельченко, А.А. Скребцов, І.А. Петрик, А.А. Панкеєва. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2018. − 58с.

Укладачі: *В.Г. Шевченко*, доцент, к.т.н.
С.Л. Рягін, доцент, к.т.н.
О.Г. Попович, доцент, к.т.н.
О.С. Омельченко, ст. викладач
А.А. Скребцов, доцент, к.т.н.
І.А. Петрик, ст. викладач, к.т.н.
А.А. Панкеєва, ст. викладач

Рецензент: *Г.Д. Фурсіна*, доцент, к.т.н.

Відповідальний
за випуск: *В.Г. Шевченко*, доцент, к.т.н., зав. каф.

Видання перероблене та доповнене.

ЗАТВЕРДЖЕНО
на засіданні кафедри механіки
Протокол № 5 від 20.02.2018 року

Рекомендовано
до видання НМК факультету будівництва, архітектури та дизайну
Протокол № 3 від 26.03.2018 року

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Опір матеріалів − наука про інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів конструкцій різних споруд та механізмів [1].

Опір матеріалів, як загальнотехнічна дисципліна, ґрунтується на теоретичних і дослідних даних. Тому при вивченні курсу „Опір матеріалів" студенти вивчають теорію (лекційні заняття) та виконують лабораторні роботи, які є обов'язковою частиною навчального процесу. Для кращого засвоєння теорії та опанування методами розрахунку типових елементів конструкцій студенти, в межах самостійні роботи, виконують розрахунково-графічні роботи (РГР).

Студент повинен виконувати РГР за своїм особистим варіантом, що складається з двох останніх цифр номеру його залікової книжки, де передостання цифра − номер рядка в таблиці даних, яка додається до кожної задачі, остання цифра − номер розрахункової схеми.

Наприклад, номер залікової книжки − 02047013. У цьому випадку студент виконує РГР за 13-м варіантом: схема − №3, рядок в таблиці даних − 1. Якщо остання цифра нуль, то схема №10.

У випадку отримання вихідних даних у комп'ютерному класі варіант генерується автоматично.

РГР необхідно оформлювати відповідно існуючим вимогам на аркушах паперу формату А4.

Перевірку правильності виконання РГР здійснює викладач. У випадку отримання вихідних даних у комп'ютерному класі, студент попередньо має виконати самоперевірку за допомогою відповідного програмного комплексу.

Крім того, можливо проходження студентами самоконтролю (тестування) за наступними темами ІІІ семестру:

- геометричні характеристики плоских перерізів;
- розтягання або стискання;
- дослідження напруженого стану в точці деформування тіла;
- кручення;
- згинання.

Типові питання до кожної теми розглянуті у методичних вказівках [3].

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ

1 ВИЗНАЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СКЛАДЕНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Як відомо, опір елементів конструкцій різним видам деформації часто залежить не тільки від матеріалу та розмірів, а й від обрису вісі, форми поперечних перерізів та їх розташування.

Тому, незважаючи на фізико-механічні властивості об'єкту, що вивчається, розглянемо порядок визначення основних геометричних характеристик поперечних перерізів, які визначають опір різним видам деформацій.

1.1 Умова задачі

Для заданого поперечного перерізу необхідно:

а) виписати розміри прокатних профілів, з яких складається переріз, із таблиць сортаменту [1] і накреслити його в масштабі на аркуші паперу формату А4;

б) провести допоміжні осі координат, відносно яких визначити положення центру ваги кожного профілю;

в) визначити положення центру ваги заданого перерізу та провести на кресленні центральні осі O_cx_c, O_cy_c;

г) визначити осьові (екваторіальні) та відцентровий момент інерції відносно центральних осей;

д) визначити положення головних центральних осей (O_cu, O_cv) і провести їх на кресленні;

е) визначити моменти інерції відносно головних центральних осей;

ж) визначити моменти опору заданого перерізу.

Схеми складених перерізів та номери їх профілів наведені на рисунці 1.1 і в таблиці 1.1.

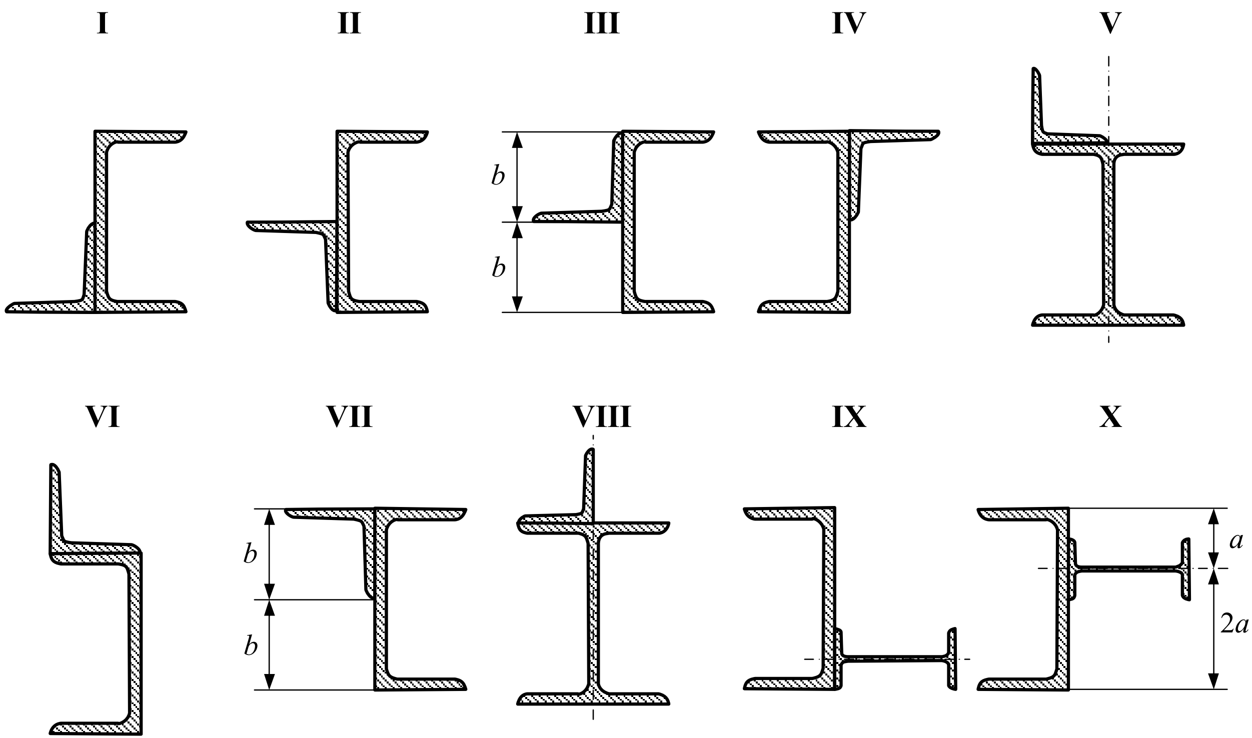


Рисунок 1.1 − Схеми складених перерізів з рівнобічним кутником або двотавром

Таблиця 1.1 – Номери профілів складеного перерізу

№ рядка	Швелер	Двотавр	Рівнобічний кутник
1	14	12	№8: 80×80×8
2	16	14	№8: 80×80×6
3	18	16	№9: 90×90×8
4	20	18	№9: 90×90×7
5	22	20а	№9: 90×90×6
6	24	20	№10: 100×100×8
7	27	22а	№10: 100×100×10
8	30	22	№10: 100×100×12
9	33	24а	№12,5: 125×125×10
0	36	24	№12,5: 125×125×12

1.2 Приклад рішення задачі

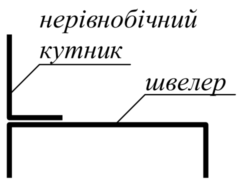


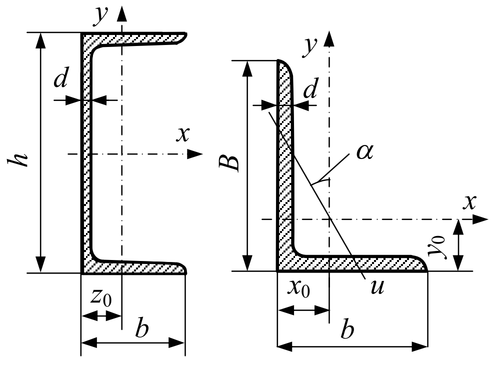
Рисунок 1.2 − Ескіз заданого складеного перерізу

Нехай заданий переріз, ескіз якого зображено на рис.1.2, складається зі швелера №20 (ГОСТ 8210-72) і нерівнобічного кутника №16/10 (ГОСТ 8510-72). Згідно таблиць сортаменту виписуємо в табл.1.2 розміри та геометричні характеристики швелера (рис.1.3*а*) та нерівнобічного кутника (рис.1.3*б*).

Таблиця 1.2 – Основні дані профілів складеного перерізу

Профіль	№	h, B, см	b, см	d, см	F, см^2	I_x, см^4	I_y, см^4	$I_{u_{min}}$, см^4	y_0, см	x_0, z_0 см	$tg\ \alpha$
Швелер	20	20	7,6	0,52	23,4	1520	113	–	–	2,07	–
Кутник	16/10	16	10	1,0	25,3	667	204	121	5,23	2,28	0,39

Після цього креслимо заданий переріз в масштабі 1:2 (рис.1.4) і проводимо центральні осі, O_1x_1, O_1y_1 та O_2x_2, O_2y_2 кожного профілю з позначенням їх центрів ваги O_1, O_2. Індекси 1 і 2 відповідають нумерації профілів у складеному перерізі.



а) *б)*

Рисунок 1.3 − Схеми заданих профілів згідно таблиць сортаменту

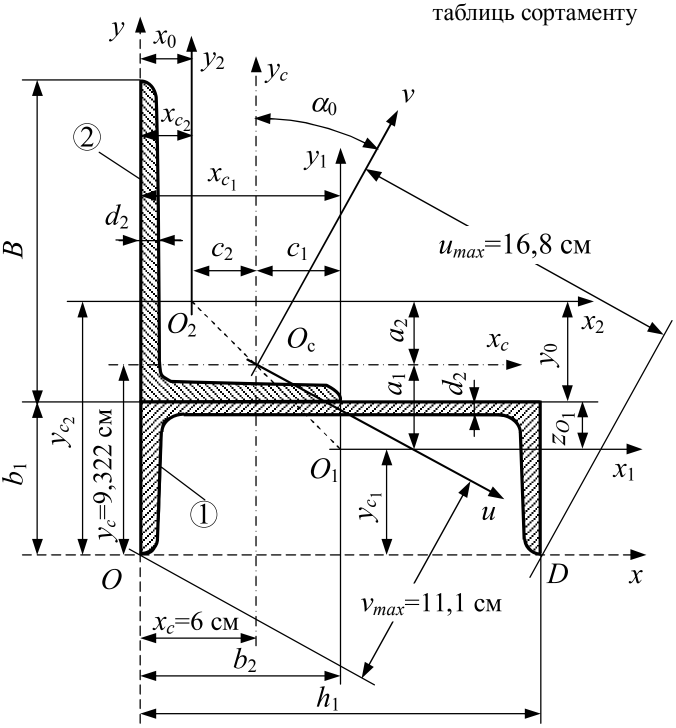


Рисунок 1.4 − Схема заданого складеного перерізу

1.2.1 *Визначення положення центру ваги складеного перерізу*

Для визначення положення центру ваги перерізу необхідно обрати та накреслити систему допоміжних осей, і в цій системі визначити координати центрів ваги кожного профілю, тобто x_{c1}, y_{c1} та x_{c2}, y_{c2}.

Допоміжні осі обирають таким чином, щоб вони проходили по характерним точкам перерізу. На рис.1.4 допоміжні осі позначені Ox, Oy (пунктир). Відповідно, координати центрів ваги швелера і кутника визначаємо так (рис.1.4):

$$x_{c1}=h_1/2=20/2=10 \text{ см}; \quad y_{c1}=b_1-z_{o1}=7{,}6-2{,}07=5{,}53 \text{ см};$$

$$x_{c2}=x_o=2{,}28 \text{ см}; \quad y_{c2}=b_1+y_o=7{,}6+5{,}23=12{,}83 \text{ см},$$

де h_1, b_1, z_{o1}, x_o, y_o − параметри швелера і кутника (табл.1.2).

Тепер за відповідними формулами визначаємо координати центру ваги складеного перерізу в системі допоміжних осей Ox, Oy:

$$x_c=\frac{S_y}{F}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}F_i\cdot x_{c_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n}F_i}=\frac{F_1\cdot x_{c_1}+F_2\cdot x_{c_2}}{F_1+F_2}=$$

$$=\frac{23{,}4\cdot 10+25{,}3\cdot 2{,}28}{23{,}4+25{,}3}=5{,}989 \text{ см};$$

$$y_c=\frac{S_x}{F}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}F_i\cdot y_{c_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n}F_i}=\frac{F_1\cdot y_{c_1}+F_2\cdot y_{c_2}}{F_1+F_2}=$$

$$=\frac{23{,}4\cdot 5{,}53+25{,}3\cdot 12{,}83}{23{,}4+25{,}3}=9{,}322 \text{ см};$$

де F_1, F_2 − площі поперечних перерізів швелера і кутника.

За результатами обчислення позначаємо у масштабі на кресленні (рис.1.4) положення центру ваги складеного перерізу та проводимо відповідну систему центральних осей O_cx_c, O_cy_c (штрихпунктир). З метою перевірки правильності розрахунку необхідно упевнитись, що точка перетину центральних осей лежить на прямій, яка з'єднує центри ваги O_1 та O_2.

Тепер відносно осей O_cx_c, O_cy_c обчислюємо координати центрів ваги швелера та кутника:

$$c_1 = x_{c_1} - x_c = 10 - 5{,}989 = 4{,}011 \text{ см};$$

$$a_1 = y_{c_1} - y_c = 5{,}53 - 9{,}322 = -3{,}792 \text{ см};$$

$$c_2 = x_{c_2} - x_c = 2{,}28 - 5{,}989 = -3{,}709 \text{ см};$$

$$a_2 = y_{c_2} - y_c = 12{,}83 - 9{,}322 = 3{,}508 \text{ см}.$$

1.2.2 *Визначення моментів інерції відносно центральних осей*

Момент інерції складеного перерізу відносно центральних осей визначається як сума моментів інерції кожного профілю, з яких складається заданий переріз, тобто:

$$I_{x_c} = I_{x_c}^{\mathrm{I}} + I_{x_c}^{\mathrm{II}} ;$$

$$I_{y_c} = I_{y_c}^{\mathrm{I}} + I_{y_c}^{\mathrm{II}} ;$$

$$I_{x_c y_c} = I_{x_c y_c}^{\mathrm{I}} + I_{x_c y_c}^{\mathrm{II}}$$

де I_{x_c} , I_{y_c} − осьові моменти інерції;

$I_{x_c y_c}$ − відцентровий момент інерції.

В свою чергу, моменти інерції кожного профілю відносно центральних осей складеного перерізу визначаються за формулами паралельного переносу осей. Для першого профілю:

$$I_{x_c}^{\mathrm{I}} = I_{x_1} + a_1^2 F_1 ;$$

$$I_{y_c}^{\mathrm{I}} = I_{y_1} + c_1^2 F_1 ;$$

$$I_{x_c y_c}^{\mathrm{I}} = I_{x_1 y_1} + a_1 c_1 F_1 ,$$

де I_{x_1}, I_{y_1} − осьові моменти інерції швелера відносно своїх центральних осей O_1x_1, O_1y_1 (рис.1.4); $I_{x_1y_1}$ − відцентровий момент інерції швелера відносно осей O_1x_1, O_1y_1.

Для другого профілю – за аналогією.

Якщо підставити відповідні числові значення у наведені залежності, будемо мати наступне.

1.2.2.1 *Осьові моменти інерції*

$$I_{x_c}^{\mathrm{I}} = I_{x_1} + a_1^2 \cdot F_1 = 113 + (-3{,}792)^2 \cdot 23{,}4 = 449{,}475 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_c}^{\mathrm{II}} = I_{x_2} + a_2^2 \cdot F_2 = 667 + 3{,}508^2 \cdot 25{,}3 = 978{,}343 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_c} = I_{x_c}^{\mathrm{I}} + I_{x_c}^{\mathrm{II}} = 449{,}475 + 978{,}343 = 1427{,}82 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c}^{\mathrm{I}} = I_{y_1} + c_1^2 \cdot F_1 = 1520 + 4{,}011^2 \cdot 23{,}4 = 1896{,}462 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c}^{\mathrm{II}} = I_{y_2} + c_2^2 \cdot F_2 = 204 + \left(-3{,}709\right)^2 \cdot 25{,}3 = 552{,}044 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c} = I_{y_c}^{\mathrm{I}} + I_{y_c}^{\mathrm{II}} = 1896{,}462 + 552{,}044 = 2448{,}507 \text{ см}^4;$$

де I_{x_1}=113 см^4, I_{y_1}=1520 см^4 − моменти інерції швелера відносно осей O_1x_1 та O_1y_1 на рис.1.4 відповідно, оскільки швелер у складеному перерізі має горизонтальне положення, а не таке, як на рис.1.3*а* та в таблиці сортаменту[1].

1.2.2.2 *Відцентровий момент інерції*

$$I_{x_cy_c}^{\mathrm{I}} = I_{x_1y_1} + a_1c_1F_1 = 0 + (-3{,}792) \cdot 4{,}011 \cdot 23{,}4 = -355{,}91 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_cy_c}^{\mathrm{II}} = I_{x_2y_2} + a_2c_2F_2 = -212.9 + 3{,}508 \cdot \left(-3{,}709\right) \cdot 25{,}3 = -542{,}08 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_cy_c} = I_{x_cy_c}^{\mathrm{I}} + I_{x_cy_c}^{\mathrm{II}} = -355{,}91 - 542{,}08 = -897{,}99 \text{ см}^4;$$

---

[1] Це застереження відноситься і до двотавра на схемах IX, X (рис.1.1).

де $I_{x_1y_1}$ − відцентровий момент інерції швелера відносно своїх осей O_1x_1, O_1y_1; $I_{x_2y_2}$ − відцентровий момент інерції кутника відносно своїх осей O_2x_2, O_2y_2.

Так як осі O_1x_1, O_1y_1 швелера є головними центральними осями (вісь x_1 є віссю симетрії), то $I_{x_1y_1}=0$. Це стосується також і двотаврового профілю.

Осі O_2x_2, O_2y_2 нерівнобічного кутника не є головними, тому відцентровий момент інерції відносно таких осей можна визначити за формулою:

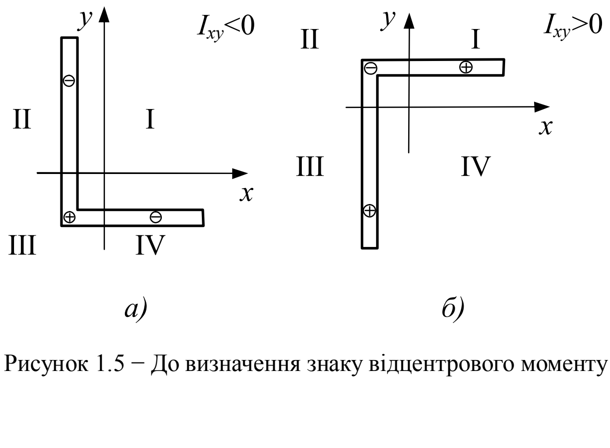
$$I_{x_2y_2}=(I_x-I_{u_{min}})\cdot tg\alpha=(667-121)\cdot 0{,}39=-212{,}9\ \text{см}^4.$$

Знак відцентрового моменту визначається знаком відцентрових моментів окремих частин кутника, розташованих у відповідних квадрантах центральної системи координат x, y (рис.1.5*а*), тобто:

$$I_{xy}=\int\limits_F xydF=\int\limits_{F_{\text{II}}} xydF+\int\limits_{F_{\text{III}}} xydF+\int\limits_{F_{\text{IV}}} xydF=I_{xy}^{\text{II}}+I_{xy}^{\text{III}}+I_{xy}^{\text{IV}}.$$

Так як сума площ окремих частин кутника ($F_{\text{II}}+F_{\text{IV}}$) з від'ємними добутками координат xy більша, ніж площа F_{III} з додатнім добутком xy, то відцентровий момент кутника згідно рис.1.5*а* є від'ємним, тобто $I_{xy}<0$.

Порівнюючи зображення нерівнобічного кутника і напрям центральних осей O_2x_2, O_2y_2 на рис.1.4 та x, y на рис.1.5*а*, можна дійти висновку, що $I_{x_2y_2}<0$. Для іншого розташування кутника на рис.1.5*б* за аналогією можна визначити, що відцентровий момент є додатнім ($I_{xy}>0$.)



а) *б)*

Рисунок 1.5 − До визначення знаку відцентрового моменту

Описані вище пояснення щодо знаку відцентрового моменту стосуються також і рівнобічного кутника (рис.1.6), модуль якого визначається формулою:

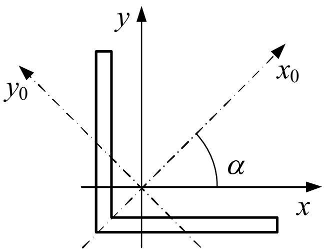


Рисунок 1.6 − До визначення відцентрового моменту рівнобічного кутника

$$I_{xy} = \frac{I_{x_0 max} - I_{y_0 min}}{2} sin\, 2\alpha,$$

де $I_{x_{0max}}$, $I_{x_{0min}}$ − головні моменти інерції відносно головних осей x_0, y_0.

Головна вісь x_0 є віссю симетрії, тому кут α=45°, а $sin2\alpha$=1.

1.2.3 ***Визначення положення головних осей інерції складеного перерізу***

Щоб знайти положення головних осей інерції, потрібно центральні осі O_cx_c, O_cy_c повернути проти годинникової стрілки на кут α_0, який визначається за допомогою формули:

$$tg2\alpha_0 = \frac{2I_{x_cy_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}}.$$

Після підстановки значень I_{x_c}, I_{y_c}, $I_{x_cy_c}$ маємо:

$$tg2\alpha_0 = \frac{2(-897{,}99)}{2448{,}507 - 1427{,}82} = -1{,}75958;$$

$$\alpha_0 = 0{,}5 \cdot arctg(-1{,}75958) = -30{,}2°.$$

Знак мінус вказує на те, що головні осі, відносно центральних, необхідно повернути за годинниковою стрілкою. На рис.1.4 головні осі позначені як O_cu, O_cv (жирна суцільна лінія).

З метою перевірки правильності визначення кута α_0 обчислимо відцентровий момент відносно головних осей, який повинен дорівнювати нулю:

$$I_{uv} = \frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2} sin\,2\alpha_0 + I_{x_c y_c} cos\,2\alpha_0 =$$

$$= \frac{1427{,}82 - 2448{,}507}{2} \cdot (-0{,}86941) + (-897{,}99) \cdot 0{,}4941 =$$

$$= 8{,}8 \cdot 10^{-4} \approx 0.$$

Головні центральні осі мають найбільш практичне значення, так як розрахунок напружень і деформацій в системі цих осей набагато спрощується.

1.2.4 ***Визначення головних моментів інерції***

$$I_{\substack{max\\min}} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2}\right)^2 + I_{x_c y_c}^2} =$$

$$= \frac{1427{,}82 + 2448{,}507}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1427{,}82 - 2448{,}507}{2}\right)^2 + (-897{,}99)^2} =$$

$$= 1938{,}164 \pm 1032{,}878;$$

$$I_{max} = 1938{,}164 + 1032{,}878 = 2971{,}042 \text{ см}^4 \rightarrow I_v;$$

$$I_{min} = 1938{,}164 - 1032{,}878 = 905{,}286 \text{ см}^4 \rightarrow I_u;$$

Так як $I_{y_c} > I_{x_c}$, то максимальний момент буде відносно головної вісі $O_c v$, яка відхиляється від центральної вісі $O_c y_c$ на кут α_0.

1.2.5 *Визначення моментів опору*

$$W_u = \frac{I_u}{v_{max}} = \frac{905{,}286}{11{,}1} = 81{,}56 \text{ см}^3;$$

$$W_v = \frac{I_v}{u_{max}} = \frac{2971{,}042}{16{,}8} = 176{,}8 \text{ см}^3,$$

де v_{max}, u_{max} − відстані від головних осей до найбільш віддалених від них точок перерізу. Ці відстані можна безпосередньо виміряти на кресленні з урахуванням масштабу або обчислити за аналітичними формулами:

$$u = y\sin\alpha + x\cos\alpha;$$

$$v = y\cos\alpha - x\sin\alpha.$$

У розглядуваному прикладі найбільшу за модулем координату по осі $O_c u$ має крайня точка *D*, а найбільшу за модулем координату по осі $O_c v$ має точка *O*.

Координати зазначених крайніх точок (рис.1.4) в системі центральних осей $O_c x_c$, $O_c y_c$ будуть такими:

$$x_D = c_1 + h_1/2 = 4{,}011 + 10 = 14{,}011 \text{ см};$$

$$y_D = -y_c = -9{,}322 \text{ см};$$

$$x_O = -x_c = -5{,}989 \text{ см}; \quad y_O = -y_c = -9{,}322 \text{ см};$$

$$\text{кут } \alpha = \alpha_0 = -30{,}2°,$$

Тоді $u_{max} = -9{,}322 \cdot sin(-30{,}2°) + 14{,}011 \cdot cos(-30{,}2°) = 16{,}8$ см;

$$v_{max} = |-9{,}322 \cdot cos(-30{,}2°) + 5{,}989 \cdot sin(-30{,}2°)| = 11{,}1 \text{ см}.$$

Аналогічно можна визначити відстані від інших крайніх точок складеного перерізу до осей $O_c u$, $O_c v$ і довести, що розраховані значення u_{max}, v_{max} дійсно є максимальними.

[1, С. 23-35; 2, С. 5-16].

2 ПОБУДОВА ЕПЮР ПОЗДОВЖНІХ СИЛ І ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ РОЗТЯГАННІ СХІДЧАСТОГО СТРИЖНЯ З УРАХУВАННЯМ ВЛАСНОЇ ВАГИ

2.1 Умова задачі

Сталевий стрижень знаходиться під дією поздовжньої сили P і власної ваги. Модуль пружності матеріалу стрижня E=2·10^5 МПа, питома вага γ=78 кН/м^3.

При виконанні задачі необхідно:

а) використовуючи метод перерізів, побудувати епюру поздовжніх сил $N(z)$;

б) побудувати епюру переміщень $\Delta l(z)$.

Розрахункові схеми та вихідні дані наведені на рис.2.1 і в табл.2.1.

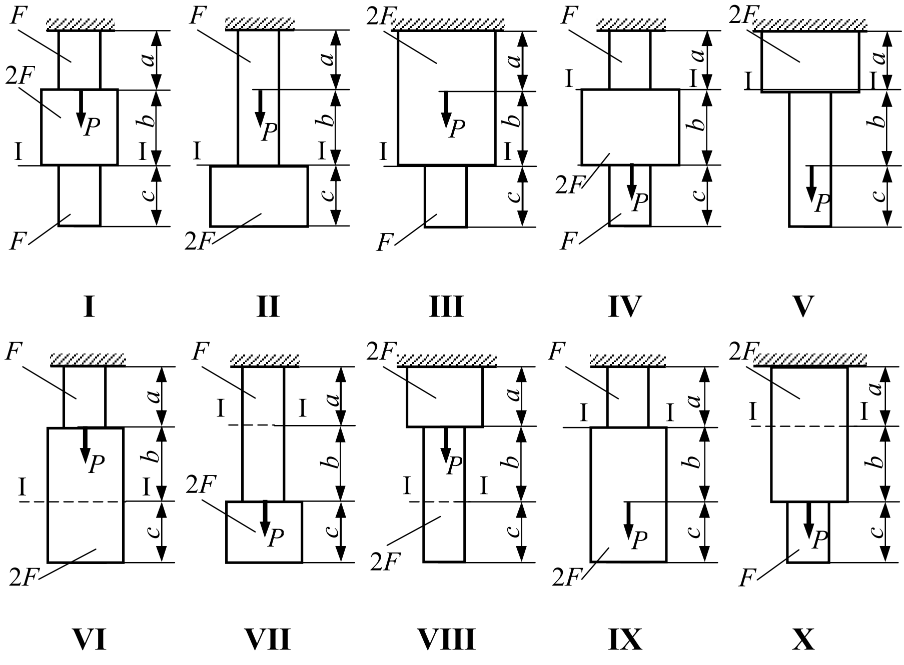


Рисунок 2.1 − Розрахункові схеми

Таблиця 2.1 − Вихідні дані

№ рядка	Площа, $F \cdot 10^4$ м^2	Довжина ділянок, м			Зосереджена сила P, кН
		a	$в$	c	
1	11	2,1	2,1	1,1	1,1
2	12	2,2	2,2	1,2	1,2
3	13	2,3	2,3	1,3	1,3
4	14	2,4	2,4	1,4	1,4
5	15	2,5	2,5	1,5	1,5
6	16	2,6	2,6	1,6	1,6
7	17	2,7	2,7	1,7	1,7
8	18	2,8	2,8	1,8	1,8
9	19	2,9	2,9	1,9	1,9
0	20	3,0	3,0	2,0	2,0

2.2 Приклад виконання задачі

Вихідні дані:

$$P=1{,}2 \text{ кН};\quad F=20\cdot10^{-4} \text{ м}^2;\quad a=2{,}2 \text{ м};\quad b=3 \text{ м};$$

$$c=1{,}2 \text{ м};\quad E=2\cdot10^{11} \text{ Па};\quad \gamma=78 \text{ кН/м}^3;$$

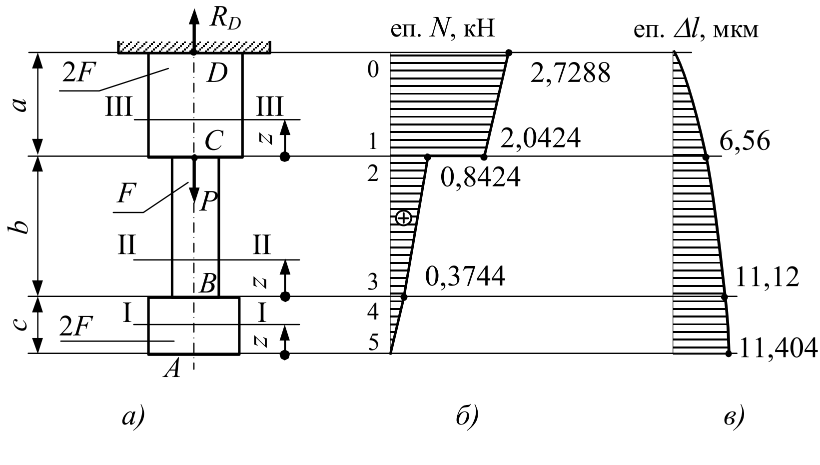


Рисунок 2.2 − Розрахункова схема і епюри поздовжніх сил та переміщень

2.2.1 ***За вихідними даними креслимо розрахункову схему*** (рис.2.2*а*) в певному масштабі, наприклад: для довжини стрижня − 1м=10мм; для діаметру стрижня − $1\cdot10^{-2}$м=1мм.

2.2.2 ***Побудова епюри поздовжніх сил***

Розпочинаючи будувати епюру, визначаємо ділянки стрижня. Границями ділянок є точки прикладення зовнішніх сил та зміни розмірів поперечного перерізу. В нашому випадку маємо три ділянки: *AB, BC* та *CD* (рис.2.2*а*).

Поздовжня (осьова) сила вважається додатною, якщо вона спричиняє розтягання, та від'ємною, якщо вона спричиняє стискання.

Поздовжню силу в довільному перерізі стрижня знаходимо з рівняння рівноваги, яке записуємо для відсіченої частини у вигляді

$$N+\sum P_z=0, \qquad (2.1)$$

де $\sum P_z$ − алгебраїчна сума проекцій на вісь стрижня всіх зовнішніх сил, які діють на відсічену частину.

Початок координат для кожної ділянки вибираємо в точках *A, B, C.*

Проведемо довільний переріз I−I на ділянці *AB* (рис.2.2*а*) та, умовно відкинувши верхню частину стрижня, розглянемо рівновагу нижньої (рис.2.3).

Ділянка AB (переріз I−I):

$$0\le z\le c$$

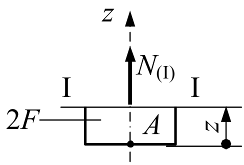


Рисунок 2.3 − Відсічена нижня частина стрижня

На цю частину діє шукане зусилля *N* (завжди направлене від перерізу в сторону розтягання) і зовнішня сила – вага відсіченої частини $\gamma\cdot2\cdot F\cdot z$, направлена униз.

Складаючи рівняння рівноваги, маємо:

$$N_{(I)}-\gamma\cdot2\cdot F\cdot z=0; \quad N_{(I)}=\gamma\cdot2\cdot F\cdot z.$$

Це рівняння прямої лінії, нахиленої до вісі стрижня.

При $z=0$, в точці *A* або 5 (рис.2.2*б*): $N_{(A)}=N_5=0$;

при $z=c$, в точці *B* (4): $N_{(B)}=N_4=\gamma\cdot2\cdot F\cdot c=78\cdot2\cdot20\cdot10^{-4}\cdot1{,}2=0{,}3744$ кН.

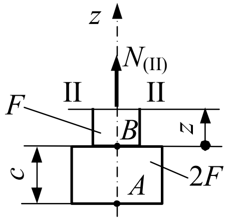
Виконуючи аналогічні дії на ділянках *BC* і *CD*, визначаємо поздовжнє зусилля в контрольних точках 3, 2, 1, 0 (рис.2.2*б*).

Ділянка BC (переріз II−II):

$0 \le z \le в$

$$N_{(II)} - \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot c - \gamma \cdot F \cdot z = 0;$$

$$N_{(II)} = \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot c + \gamma \cdot F \cdot z.$$



При $z=0$, в точці B або 3:

$$N_{(B)} = N_3 = \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot c = 0{,}3744 \text{ кН};$$

при $z=b$, в точці C або 2:

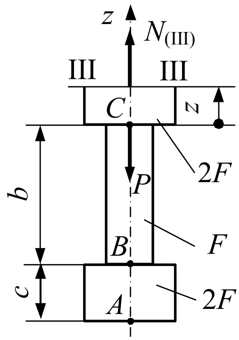
$$N_{(C)} = N_2 = 0{,}3744 + 78 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 3 = 0{,}8424 \text{ кН}.$$

Ділянка CD (переріз III−III):

$0 \le z \le a$

$$N_{(III)} - P - \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot c - \gamma \cdot F \cdot b - \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot z = 0;$$

$$N_{(III)} = P + \gamma \cdot F(2 \cdot c + b) + \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot z.$$



При $z=0$, в точці C або 1:

$$N_{(C)} = N_1 = P + \gamma \cdot F(2 \cdot c + b) = 1{,}2 + 0{,}8424 =$$
$$= 2{,}0424 \text{ кН};$$

при $z=a$, в точці D або 0:

$$N_{(D)} = N_0 = P + \gamma \cdot F(2 \cdot c + b) + \gamma \cdot 2 \cdot F \cdot a =$$
$$= 2{,}0424 + 78 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 2{,}2 =$$
$$= 2{,}7288 \text{ кН}.$$

Застосовуючи метод перерізів, можна було б на ділянці *CD* залишити верхню частину стрижня (рис.2.4), тобто довільну координату z відрахувати від точки *D* униз. В цьому випадку необхідно спочатку визначити реакцію R_D в закріпленні стрижня, так як ця реакція відноситься до числа зовнішніх сил, які діють на залишену (верхню) частину стрижня.

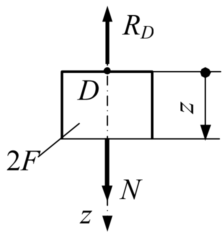


Рисунок 2.4 − Відсічена верхня частина стрижня

Поздовжнє зусилля $N_{(D)} = N_0$ є найбільше і дорівнює реакції R_D в закріпленні стрижня (рис.2.2*a*). За результатами розрахунку будуємо графік, що показує, як змінюється поздовжня сила по довжині стрижня.

Для цього проведемо базову вертикальну лінію паралельно вісі стрижня і відкладемо від цієї лінії в довільно вибраному масштабі (наприклад, 1 кН=10мм) значення поздовжніх сил в точках 5, 4, 3, 2, 1, 0. Додатну силу N (розтягання) відкладаємо вправо від вертикальної лінії. Побудований графік називають *епюрою поздовжніх сил* (рис.2.2*б*).

Епюру прийнято штрихувати перпендикулярно вісі стрижня.

На всіх ділянках стрижня залежності поздовжньої сили від координати z графічно зображуються прямими, нахиленими до базової лінії. Проте, оскільки площі поперечних перерізів на ділянках різні, нахил епюри на ділянках AB та BC не є однаковим, а на ділянках AB і CD нахилені прямі повинні бути паралельними (рис.2.2*б*).

В точках дії зосереджених зовнішніх сил на епюрі мають бути "*стрибки*", розмір яких дорівнює величині діючої сили (точка C, рис.2.2*б*).

2.2.3 *Побудова епюри переміщень*

В загальному вигляді при розтяганні (стисканні) видовження ділянки стрижня довжиною l, який має площу поперечного перерізу F, визначається за формулою:

$$\Delta l = \int_l \frac{N_{(z)}dz}{EF} \tag{2.2}$$

Якщо стрижень має декілька ділянок, то формула для його видовження набуває вигляду:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} \frac{N_{(z)}dz}{EF_i}, \tag{2.3}$$

де EF_i − жорсткість поперечного перерізу стрижня на i-й ділянці;
l_i − довжина i-ї ділянки;
n − кількість ділянок.

Зважаючи на те, що в межах кожної ділянки жорсткість поперечного перерізу є постійною, а інтегрування функції $N(z)$ зводиться до обчислення площі епюри поздовжніх сил на кожній ділянці, то формулу для визначення видовжень запишемо так:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_{N(i)}}{EF_i}, \tag{2.4}$$

де $\omega_{N(i)}$ − площа епюри N на i-й ділянці.

Для побудови епюри переміщень потрібно скористатися граничними умовами, тобто визначити такий переріз, де переміщення відоме. У нашому прикладі це є жорстке закріплення, точка *D* (рис.2.2*а*).

В місці жорсткого закріплення переміщення перерізу стрижня відсутнє, тому $\Delta l_{(D)}=0$. Далі визначимо видовження ділянок стрижня, розташованих між перерізами *D* і *C*, *D* і *B*, *D* і *A*. Ці видовження одночасно є переміщення поперечних перерізів стрижня, які проходять через точки *C*, *B*, *A* відповідно:

$$\Delta l_{(C)} = \Delta l_{(D)} + \frac{\omega_{N(DC)}}{E \cdot 2F} = 0 + \frac{0{,}5 \cdot \left(N_0 + N_1\right) \cdot a}{E \cdot 2F} =$$

$$= \frac{0{,}5 \cdot \left(2{,}7288 + 2{,}0424\right) \cdot 10^3 \cdot 2{,}2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 6{,}5604 \cdot 10^{-6} \text{ (м).}$$

$$\Delta l_{(B)} = \Delta l_{(C)} + \frac{\omega_{N(CB)}}{E \cdot F} = 6{,}5604 + \frac{0{,}5 \cdot \left(N_2 + N_3\right) \cdot b}{E \cdot F} =$$

$$= 6{,}5604 \cdot 10^{-6} + \frac{0{,}5 \cdot \left(0{,}8424 + 0{,}3744\right) \cdot 10^3 \cdot 3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4}} =$$

$$= (6{,}5604 + 4{,}563) \cdot 10^{-6} = 11{,}123 \cdot 10^{-6} \text{ (м);}$$

$$\Delta l_{(A)} = \Delta l_{(C)} + \frac{\omega_{N(BA)}}{E \cdot 2F} = 11{,}123 + \frac{0{,}5 \cdot \left(N_4 + N_5\right) \cdot c}{E \cdot 2F} =$$

$$= 11{,}123 \cdot 10^{-6} + \frac{0{,}5 \cdot \left(0{,}3744 + 0\right) \cdot 10^3 \cdot 1{,}2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} =$$

$$= (11{,}123 + 0{,}2808) \cdot 10^{-6} = 11{,}404 \cdot 10^{-6} \text{ (м).}$$

Для зручності побудови епюри переміщень переведемо метри в мікрометри, тобто визначені переміщення помножимо на 10^6. Тоді:

$\Delta l_{(C)}=6{,}5604$ мкм; $\Delta l_{(B)} = 11{,}123$ мкм; $\Delta l_{(A)} = 11{,}404$ мкм.

За результатами розрахунку будуємо епюру переміщень, які змінюються по довжині стрижня за законом квадратичної параболи (рис.2.2*в*). Масштаб переміщень приймаємо, наприклад: 1мкм =1мм.

[1, С. 42-43, 123-128; 2, С. 17-22].

3 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНОЇ СТРИЖНЕВОЇ СИСТЕМИ, ЕЛЕМЕНТИ ЯКОЇ ПРАЦЮЮТЬ НА РОЗТЯГАННЯ АБО СТИСКАННЯ

Стрижневі системи, у яких кількість невідомих сил, в тому числі – реакцій опор, більша кількості рівнянь рівноваги (статики), називають статично невизначуваними. Ступінь статичної невизначуванності є різниця між кількістю невідомих і кількістю рівнянь статики, які можна скласти для даної системи.

При розв’язуванні таких задач завжди необхідно розглядати три групи рівнянь:

– рівняння рівноваги;
– геометричні рівняння (рівняння сумісності деформацій);
– фізичні рівняння (закон Р.Гука), за допомогою яких можна виразити статичні та геометричні рівняння через зусилля або переміщення.

Якщо за основні невідомі системи сприймати зусилля, то такий підхід називається *методом сил*, а якщо за основні невідомі сприймати переміщення, то − *методом переміщень*.

3.1 Умова задачі

Абсолютно жорсткий брус прикріплений до нерухомої шарнірної опори і підтримується двома стрижнями, з’єднаними з ним за допомогою шарнірів.

Необхідно:

а) визначити зусилля і напруження в стрижнях, виражаючи їх через зовнішню силу Q;

б) визначити допустиме навантаження $[Q]$, прирівнюючи більше із напружень у двох стрижнях допустимому напруженню $[\sigma]$=160 МПа;

в) визначити граничну вантажопідйомність Q_T і допустиме навантаження $[Q_T]$, якщо границя текучості σ_T=240 МПа, а коефіцієнт запасу міцності n_T=1,5;

г) порівняти величини $[Q]$ та $[Q_T]$.

Розрахункові схеми та вихідні дані наведені на рисунку 3.1 і в таблиці 3.1.

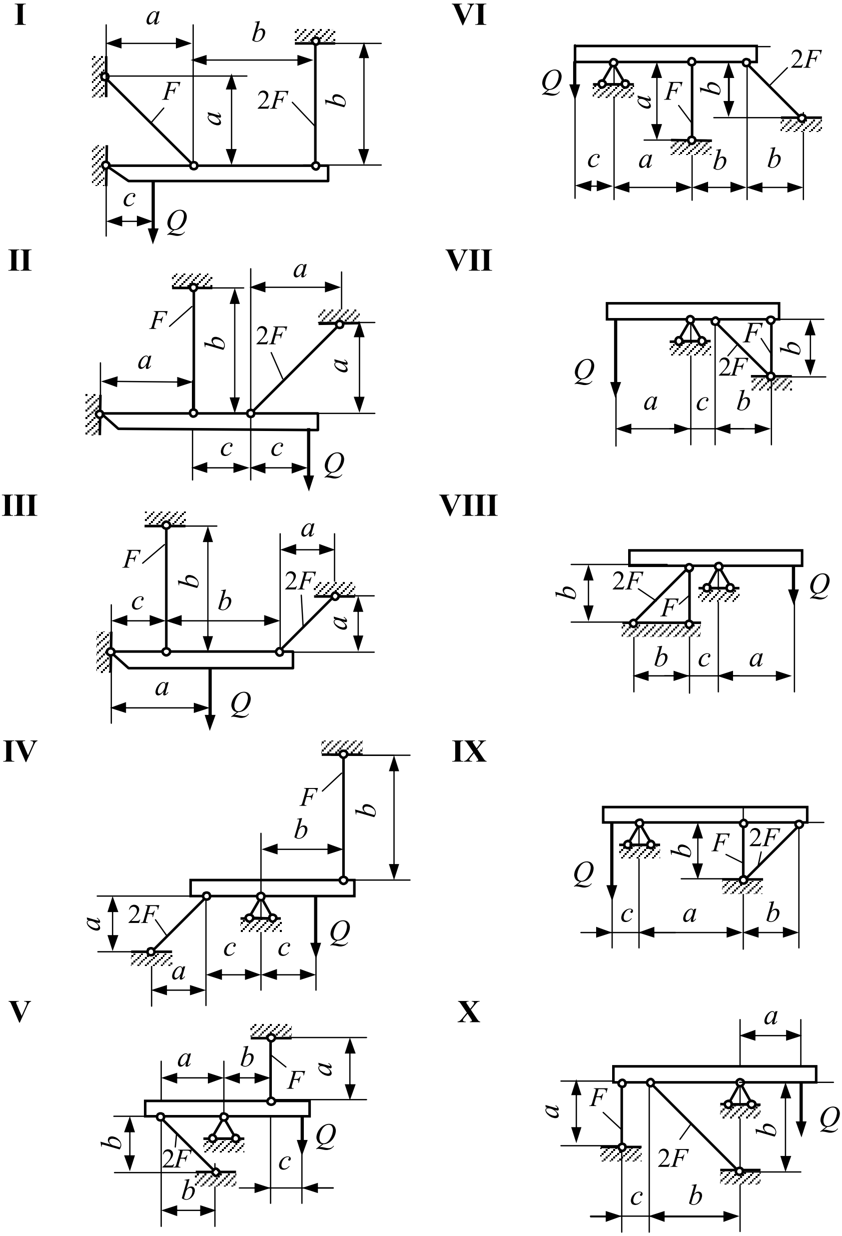


Рисунок 3.1 − Розрахункові схеми

Таблиця 3.1 − Вихідні дані

№ рядка	Площа $F\cdot10^4$, м^2	Довжина, м		
		a	*b*	*c*
1	11	2,1	3,0	1,1
2	12	2,2	2,9	1,2
3	13	2,3	2,8	1,3
4	14	2,4	2,7	1,4
5	15	2,5	2,6	1,5
6	16	2,6	2,5	1,6
7	17	2,7	2,4	1,7
8	18	2,8	2,2	1,8
9	19	2,9	2,2	1,9
0	20	3,0	2,1	2,0

3.2 Приклад розрахунку

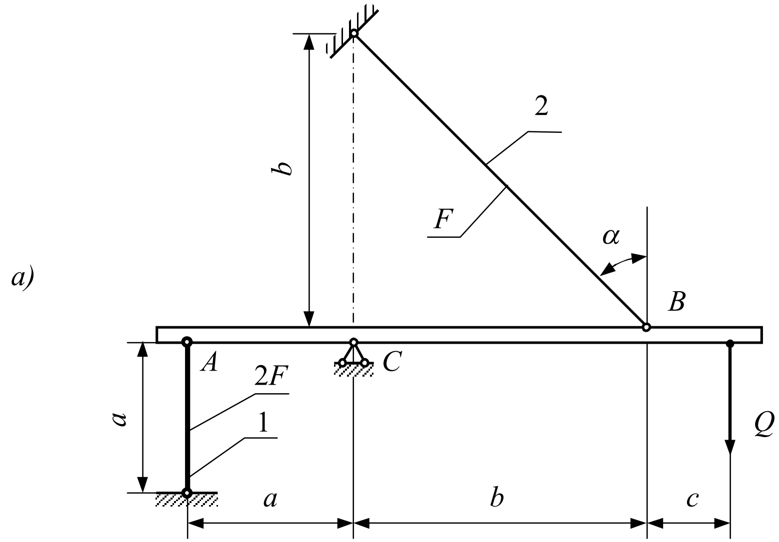
Вихідні дані:

$$a=1 \text{ м};\quad b=2 \text{ м};\quad c=0{,}5 \text{ м};\quad F=10\cdot10^{-4} \text{ м}^2.$$

В певному масштабі накреслимо задану стрижневу систему (рис.3.2*а*).

Шарнірно нерухому опору позначено через *С*, а шарніри, за допомогою яких стрижні прикріплені до абсолютно жорсткого бруса – через *А* і *В* (рис.3.2*а*).

Вертикальний стрижень позначимо через 1, а нахилений − через 2. Щоб показати зусилля, які виникають у двох стрижнях при навантаженні силою Q, умовно розріжемо їх, і в перерізі зобразимо зусилля N_1 та N_2 додатного напряму (в бік розтягання, рис.3.1*б*). Крім цього, покажемо на рис. 3.1*б* реактивні сили R_C та H_C. Таким чином, жорсткий брус знаходиться в рівновазі під дією чотирьох невідомих сил (N_1, N_2, R_C, H_C), лінії дії яких розташовані в одній площині. Проте, рівнянь рівноваги для довільної плоскої системи сил можна скласти лише три. Тому досліджувана стрижнева система є один раз статично невизначуваною.



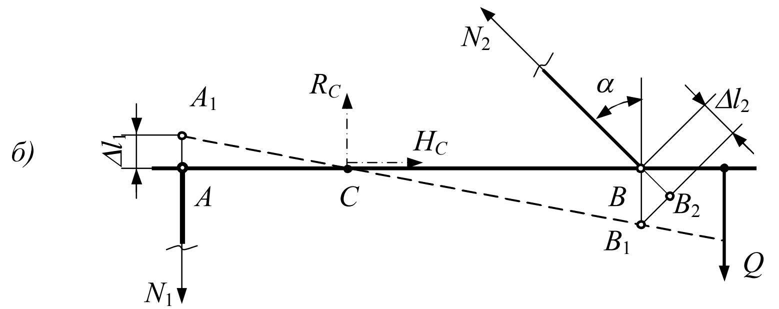


Рисунок 3.2 − Схеми статично невизначуваної стрижневої системи

3.2.1 Визначення зусиль і напружень у стрижнях

Задачу будемо розв’язувати методом сил, тобто за основні невідомі приймаємо зусилля N_1 і N_2 (рис.3.1*б*).

3.2.1.1 Статичне обстеження задачі

Оскільки в задачі не ставиться за мету знайти сили реакції шарнірно-нерухомої опори R_C та H_C, то із трьох рівнянь рівноваги треба застосувати таке, яке б автоматично виключало ці реакції.

Таким рівнянням є рівняння моментів відносно шарніра C.

$$\sum M_{(C)}=0; \quad N_1 \cdot a + N_2 \cdot cos\,\alpha \cdot b - Q \cdot (b+c)=0.$$

Так як за умовою задачі кут α=45°, то cos45°=$\frac{\sqrt{2}}{2}$. Тоді остаточно рівняння рівноваги запишемо так:

$$N_1 \cdot a + N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot b = Q \cdot (b+c). \tag{3.1}$$

3.2.1.2 Геометричне обстеження задачі

В рівняння (3.1) входять два невідомих зусилля. Тому для їх визначення необхідно скласти ще одне, геометричне рівняння, яке визначає аналітичну залежність між подовженнями першого і другого стрижнів.

Завдяки тому, що абсолютно жорсткий брус закріплений до шарнірно нерухомої опори, під дією сили Q він може тільки нахилитися (повернутися) на деякий кут навколо шарніра C, деформуючи обидва стрижні. Таке положення брусу показано умовно на рис.3.1*б* − пунктирна лінія.

В результаті деформування системи точка A переміститься в точку A_1, а точка B − в точку B_1.

Відрізок AA_1 першого (вертикального) стрижня є його подовження Δl_1, а відрізок BB_2 − подовження Δl_2 другого (нахиленого) стрижня. Точка B_2 знаходиться на перетині перпендикуляра, опущеного з точки B_1 на продовження напрямку другого стрижня. Таким чином, із ΔBB_1B_2 маємо: $BB_1=\Delta l_2/cos\,\alpha$.

Для отримання рівняння сумісності деформацій розглянемо подібність трикутників $\Delta AA_1C \sim \Delta BB_1C$ і запишемо пропорцію їх сторін:

$$\frac{AA_1}{a} = \frac{BB_1}{b} \quad \text{або} \quad \frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{b \cdot cos\,\alpha}.$$

Звідси маємо геометричне рівняння:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot \frac{2a}{b \cdot \sqrt{2}}. \qquad (3.2)$$

Треба зауважити, що рівняння (3.2) стосується тільки даної схеми, а для інших схем воно буде іншим.

3.2.1.3 Фізичне обстеження задачі

Рівняння (3.1) і (3.2) містять різні невідомі. Тому необхідно розглянути фізичне рівняння, за допомогою якого можна виразити зусилля через подовження або навпаки.

Згідно закону Р.Гука, при розтяганні або стисканні пружно деформованого стрижня зусилля і подовження пов'язані наступною залежністю:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F},$$

де l − довжина стрижня;

$E \cdot F$ − жорсткість поперечного перерізу стрижня.

Для нашого прикладу

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1} = \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot 2 \cdot F}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2} = \frac{N_2 \cdot b \cdot \sqrt{2}}{E \cdot F},$$

де $l_1=a$; $F_1=2 \cdot F$− відповідно довжина і площа поперечного перерізу першого стрижня;

$l_2=b \cdot \sqrt{2}$; $F_2=F$ − відповідно довжина і площа поперечного перерізу другого стрижня.

Якщо підставити визначені подовження Δl_1, Δl_2 в рівняння (3.2), отримаємо зв'язок між зусиллями N_1 і N_2 у першому і другому стрижнях у випадку, коли вони обидва перебувають у пружно-деформованому стані:

$$\frac{N_1 \cdot a}{E \cdot 2 \cdot F} = \frac{N_2 \cdot b \cdot \sqrt{2}}{E \cdot F} \cdot \frac{2 \cdot a}{b \cdot \sqrt{2}}, \text{ звідки } N_1=4 \cdot N_2. \qquad (3.3)$$

Далі проводимо синтез, в результаті чого розв'язуємо сумісно рівняння (3.1) та (3.3), як систему рівнянь:

$$4 \cdot N_2 \cdot a + N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot b = Q \cdot (b+c);$$

$$N_2 \cdot (4 \cdot a + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot b) = Q \cdot (b+c).$$

Звідси знаходимо співвідношення між зусиллями N_1 і N_2 у пружно-деформованих стрижнях і зовнішньою силою Q:

$$N_2 = \frac{Q \cdot (b+c)}{4 \cdot a + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot b} = \frac{Q \cdot (2+0{,}5)}{4 \cdot 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2} = 0{,}46175 \cdot Q,$$

тоді $N_1=4 \cdot N_2=4 \cdot 0{,}46175 \cdot Q=1{,}847 \cdot Q$.

Визначаємо напруження в першому і другому стрижнях:

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{F_1} = \frac{1{,}847 \cdot Q}{2F} = 0{,}9235 \frac{Q}{F};$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{F_2} == 0{,}46175 \frac{Q}{F}.$$

Так як $\sigma_{(1)} > \sigma_{(2)}$, то $\sigma_{max} = \sigma_{(1)} = 0{,}9235 \frac{Q}{F}$.

3.2.2 Визначення допустимого навантаження

Із умови міцності при розтяганні визначаємо допустиме зусилля $[Q]$:

$$\sigma_{max} = 0{,}9235 \frac{Q}{F} \leq [\sigma];$$

$$[Q] = \frac{F \cdot [\sigma]}{0{,}9235} = \frac{10 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^{6}}{0{,}9235} = 0{,}17325 \cdot 10^{6} \text{ Н}.$$

При такому зусиллі визначаємо напруження в стрижнях:

$$\sigma_{(1)}=0{,}9235\,\frac{Q}{F}=0{,}9235\cdot\frac{0{,}17325\cdot10^{6}}{10\cdot10^{-4}}=160\cdot10^{6}\ \text{Па}.$$

$$\sigma_{(2)}=0{,}46175\,\frac{Q}{F}=0{,}46175\cdot\frac{0{,}17325\cdot10^{6}}{10\cdot10^{-4}}=80\cdot10^{6}\ \text{Па}.$$

3.2.3 Визначення граничної вантажопідйомності

Результати обчислення напружень показують, що розрахунок з використанням умови міцності (за допустимим напруженням) обмежує тільки один найбільш навантажений стрижень системи, тоді як в інших елементах системи напруження можуть бути набагато меншими, ніж допустимі. Такий розрахунок не завжди є раціональним. Тому в інженерній практиці існує розрахунок за граничними станами, який дає можливість зменшити металоємність або підвищити продуктивність статично невизначуваних систем.

Сутність методу граничних станів полягає в тому, що при поступовому збільшенні навантаження від допустимого зусилля $[Q]$ до граничного Q_T напруження в елементах системи досягатимуть почергово, починаючи з більш навантаженого, границі текучості σ_T. При граничному навантаженні зусилля в елементах будуть визначатися як $N_i=\sigma_T\cdot F_i$. Для нашого прикладу:

$$N_{1T}=\sigma_T\cdot F_1=\sigma_T\cdot 2\cdot F;\quad N_{2T}=\sigma_T\cdot F_2=\sigma_T\cdot F.$$

Для визначення Q_T підставимо в рівняння рівноваги (3.1) зусилля N_{1T} та N_{2T}:

$$N_{1T}\cdot a+N_{2T}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b=Q_T\cdot(b+c);$$

$$\sigma_T\cdot 2\cdot F\,a+\sigma_T\cdot F\,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b=Q_T\cdot(b+c).$$

Звідси визначаємо граничну вантажопідйомність системи:

$$Q_T = \frac{\sigma_T \cdot F \cdot \left(2a + b\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{b+c} =$$

$$= \frac{240 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot \left(2 \cdot 1 + 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2+0{,}5} = 0{,}3278 \text{ МН.}$$

Так як при граничному зусиллі система повністю втрачає несучу здатність, то його треба обмежити коефіцієнтом запасу, тобто визначити допустиме зусилля за граничним станом:

$$\left[Q_T\right] = \frac{Q_T}{n_T} = \frac{0{,}3278}{1{,}5} = 0{,}2185 \text{ МН.}$$

При зусиллі $[Q_T]$ напруження в стрижнях будуть такими:

$$\sigma_{(1)} = 0{,}9235\frac{Q_T}{F} = 0{,}9235\frac{0{,}2185}{10 \cdot 10^{-4}} = 201{,}8 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{(2)} = 0{,}46175\frac{Q_T}{F} = 0{,}46175\frac{0{,}2185}{10 \cdot 10^{-4}} = 100{,}9 \text{ МПа.}$$

Визначимо відношення допустимих зусиль:

$$\frac{\left[Q_T\right]}{\left[Q\right]} = \frac{0{,}2185}{0{,}17325} = 1{,}26 .$$

[1, С. 130-140; 2, С. 33-41].

4 АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ В ТОЧЦІ ДЕФОРМОВАНОГО ТІЛА

Досліджуючи напружений стан елементів конструкцій, найчастіше доводиться мати справу з плоским напруженим станом. Він буває при крученні, згинанні та складному опорі. При практичних розрахунках, як правило, вдається визначити (теоретично чи експериментально) нормальні чи дотичні напруження на двох взаємно перпендикулярних площадках деформованого тіла, наприклад, на площадках, що перетинають точку A (рис.4.1*а*).

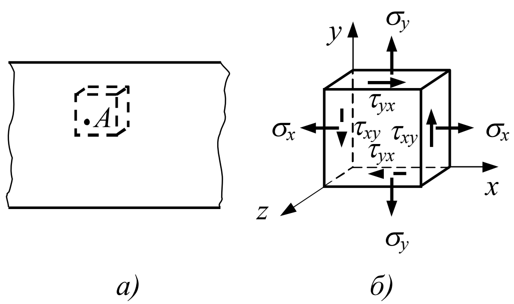


Рисунок 4.1 − Зображення плоского напруженого стану

Щоб дослідити напружений стан в заданій точці, поблизу неї виділяють елемент об’єму у вигляді нескінченно малого паралелепіпеда (рис.4.1*а*), який у збільшеному масштабі зображено на рис.4.1*б*, де початок координат суміщено з точкою A. На гранях виділеного елемента діють напруження σ_x, σ_y, τ_{xy}, які замінюють дію умовно відкинутої частини деформованого тіла на цей елемент. Внаслідок малості виділеного елемента можна вважати, що напруження на кожній його грані розподілені рівномірно.

Нормальні напруження вважають додатними, якщо вони спричинюють розтягання (направлені від грані), та від’ємними, якщо стискання (направлені до грані).

Знак дотичних напружень будемо визначати за напрямом τ_{xy}, яке діє на правій грані виділеного елемента. Якщо напрям τ_{xy} збігається з напрямом вісі y (направлено уверх), то воно додатне, якщо − вниз, то від’ємне. Напрям τ_{yx} та τ_{xy} на інших гранях вибирають у відповідності закону парності дотичних напружень.

Отже, за цими правилами компоненти напружень на рис.4.1*б* − додатні.

4.1 Умова задачі

Виділений елемент деформованого тіла перебуває у плоскому напруженому стані. Потрібно визначити:

а) положення головних площадок і головні напруження;

б) максимальні дотичні напруження;

в) відносні лінійні деформації і відносну зміну об’єму;

г) питому потенційну енергію деформації;

д) коефіцієнт запасу міцності за четвертою теорією.

Матеріал − сталь: σ_T=240 МПа; $E=2\cdot10^5$ МПа; μ=0,3.

Розрахункові схеми виділених елементів (зображені в плані) показані на рис.4.2, а вихідні дані наведені в табл.4.1.

Таблиця 4.1 − Вихідні дані[2]

№ рядка	Напруження, МПа		
	σ_x	σ_y	τ_{xy}
1	10	50	30
2	20	60	40
3	30	70	50
4	40	80	60
5	50	100	70
6	60	90	80
7	70	40	90
8	80	30	100
9	90	20	10
0	100	10	20

[2] Знаки напружень, які зображені на розрахункових схемах, необхідно узгодити відповідно наведених вище правил. Відсутність на схемах σ_x або σ_y означає, що ці напруження дорівнюють нулю.

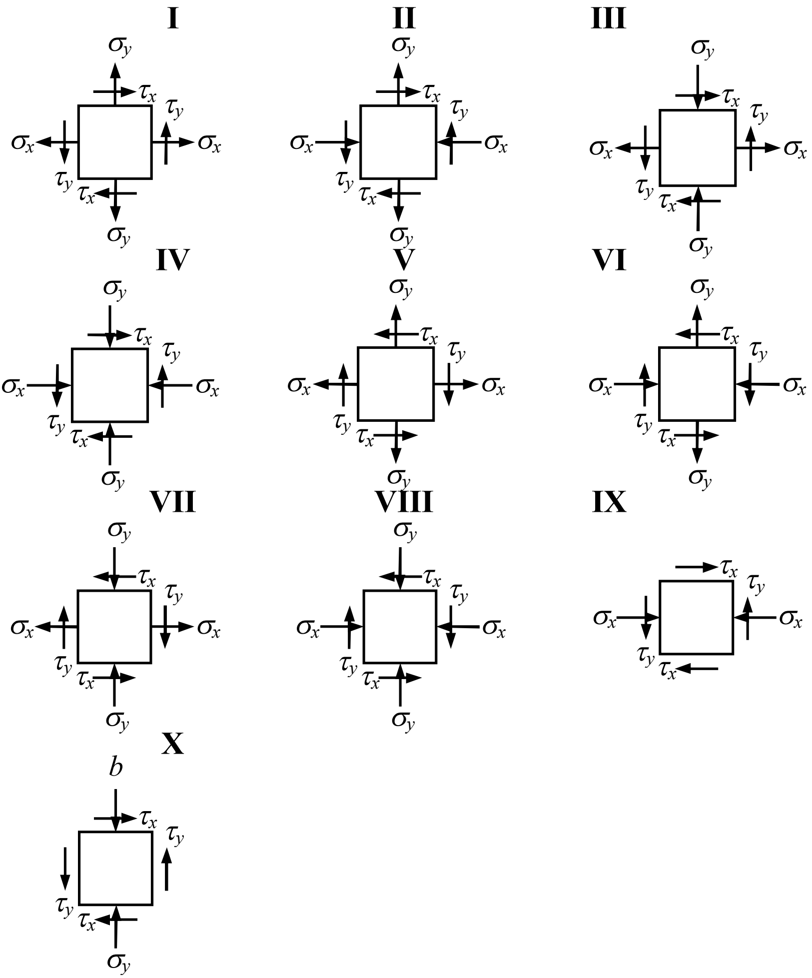


Рисунок 4.2 − Розрахункові схеми виділених елементів

4.2 Приклад розрахунку

Вихідні дані: σ_x=50 МПа; σ_y=−30 МПа; τ_{xy}=−20 МПа.

За відповідною схемою креслимо в певному масштабі виділений елемент (рис.4.3*а*). Так як нормальне напруження σ_y спричиняє стискання, а τ_{xy} направлене униз, то вони є від’ємними, тобто перед виписаними з таблиці абсолютними значеннями ставимо знак мінус.

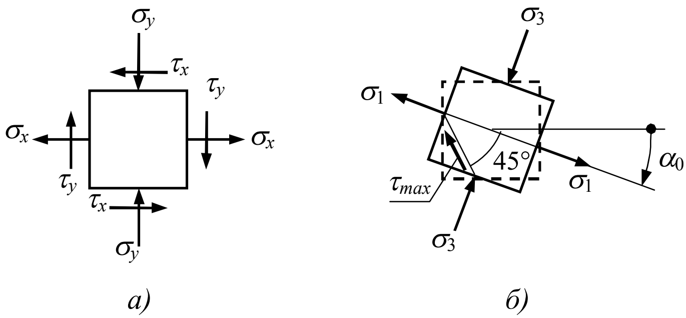


Рисунок 4.3 − Схема плоского напруженого стану

4.2.1 Визначення положення головних площадок і головних напружень

Щоб знайти положення головних площадок, потрібно грані виділеного елемента повернути проти годинникової стрілки на кут α_0, який визначається наступним чином:

$$tg2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\cdot(-20)}{50-(-30)} = -0{,}5;$$

$$\alpha_0 = 0{,}5\cdot arctg(-0{,}5) = -13{,}28°.$$

Якщо кут α_0 від'ємний, то головні площадки повернуті на даний кут за годинниковою стрілкою (рис.4.3*б*). На головних площадках дотичні напруження дорівнюють нулю, а нормальні напруження − екстремальні, значення їх обчислюємо за формулою:

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2};$$

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{50+(-30)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{50-(-30)}{2}\right)^2 + (-20)^2} = 10 \pm 44{,}72;$$

$$\sigma_{max} = 10+44{,}72 = 54{,}72 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{min}=10-44{,}72=-34{,}72\text{ МПа.}$$

Індекси екстремальним (головним) напруженням слід розставляти так, щоб виконувалась нерівність $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$. Так як у нашому прикладі є додатне і від'ємне екстремальне напруження, то між ними є число нуль. Тому

$$\sigma_{max}=\sigma_1=54{,}72\text{ МПа;}\quad \sigma_2=0;\ \sigma_{min}=\sigma_3=-34{,}72\text{ МПа.}$$

Максимальне головне напруження (σ_1) діє на площадці, нормаль до якої відхиляється проти годинникової стрілки на кут α_0 від напряму алгебраїчно більшого нормального напруження, тобто σ_x (рис.4.3*б*).

4.2.2 Визначення максимальних дотичних напружень

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\frac{54{,}72-(-34{,}72)}{2}=44{,}72\text{ МПа.}$$

Максимальні дотичні напруження діють на площадках, які завжди повернуті під кутом ±45° відносно головних (рис.4.3*б*).

4.2.3 Визначення відносних лінійних та об'ємних деформацій

Згідно узагальненого закону Р.Гука відносні лінійні деформації визначаємо за наступними залежностями:

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_x-\mu\cdot(\sigma_y+\sigma_z)\right]=\frac{1}{2\cdot10^5}\cdot\left[50-0{,}3\cdot(-30+0)\right]=0{,}295\cdot10^{-3};$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_y-\mu\cdot(\sigma_x+\sigma_z)\right]=\frac{1}{2\cdot10^5}\cdot\left[-30-0{,}3\cdot(50+0)\right]=-0{,}225\cdot10^{-3};$$

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_z-\mu\cdot(\sigma_x+\sigma_y)\right]=\frac{1}{2\cdot10^5}\cdot\left[0-0{,}3\cdot(50+(-30))\right]=-0{,}03\cdot10^{-3}.$$

За відносними лінійними деформаціями визначаємо відносну зміну об'єму:

$$\varepsilon_V=\varepsilon_x+\varepsilon_x+\varepsilon_z=(0{,}295-0{,}225-0{,}03)\cdot10^{-3}=0{,}04\cdot10^{-3}.$$

4.2.4 Визначення питомої потенційної енергії деформації

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \cdot (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right] =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^5}\left[54{,}72^2 + 0 + (-34{,}72)^2 - 2 \cdot 0{,}3 \cdot (0 + 0 + (-34{,}72)54{,}72)\right] =$$

$$= 0{,}0133492 \text{ МДж}/\text{м}^3 = 13349{,}2 \text{ Дж}/\text{м}^3.$$

4.2.5 Визначення коефіцієнта запасу міцності

Коефіцієнт запасу міцності − це відношення небезпечного напруження до максимального діючого, яке виникає при деформуванні елемента конструкції. Для пластичних матеріалів, зокрема, сталей, небезпечним напруженням є границя текучості σ_T. Щоб оцінити міцність матеріалу, який знаходиться у плоскому напруженому стані, необхідно визначити еквівалентні напруження $\sigma_{екв}$ за відповідною теорією.

Тоді коефіцієнт запасу міцності за границею текучості n_T будемо визначати як $n_T=\sigma_T/\sigma_{екв}$.

У нашому прикладі еквівалентні напруження $\sigma_{екв}$ треба визначати за четвертою теорією міцності, тобто:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]}.$$

Так як $\sigma_2=0$, то формула для визначення $\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}}$ спрощується і набуває наступного вигляду:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3} =$$

$$= \sqrt{54{,}72^2 + (-34{,}72)^2 - 54{,}72 \cdot (-34{,}72)} = 78{,}1 \text{ МПа}.$$

Тепер визначаємо коефіцієнт запасу n_T=240/78,1=3,07, на підставі якого робимо висновок, що при заданому навантаженні елемент конструкції має достатню міцність.

[1, С. 158-166; 2, С. 42-47].

5 РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ТА ЖОРСТКІСТЬ ПРИ КРУЧЕННІ ВАЛА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

5.1 Умова задачі

Сталевий вал навантажений трьома крутними моментами M_1, M_2, M_3 та попередньо невідомим моментом X.

Необхідно:

а) визначити значення моменту X при умові, що кут закручування правого кінця вала дорівнює нулю;

б) з урахуванням визначеного моменту X побудувати епюру крутних моментів;

в) за умовою міцності визначити діаметр валу і округлити його до найближчого більшого значення стандартного ряду діаметрів (ГОСТ 6636-69)[3] в межах розбіжності по напруженням 5%;

г) побудувати епюру кутів закручування;

д) визначити найбільший відносний кут закручування.

Модуль пружності другого роду прийняти рівним $G=8\cdot10^4$ МПа.

Розрахункові схеми і вихідні дані наведені на рисунку 5.1 та в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 − Вихідні дані

№ рядка	Довжина, м			Моменти, кН·м			$[\tau]$, МПа
	a	b	c	M_1	M_2	M_3	
1	1,1	1,5	2,0	1,1	1,6	2,0	35
2	1,2	1,6	1,9	1,2	1,7	1,9	40
3	1,3	1,7	1,8	1,3	1,8	1,8	45
4	1,4	1,8	1,7	1,4	1,9	1,7	50
5	1,5	1,9	2,6	1,5	2,0	1,6	55
6	1,6	2,0	1,5	1,6	1,1	1,5	60
7	1,7	1,1	1,4	1,7	1,2	1,4	65
8	1,8	1,2	1,3	1,8	1,3	1,3	70
9	1,9	1,3	1,2	1,9	1,4	1,2	75
0	2,0	1,4	1,1	2,0	1,5	1,1	80

[3] При округленні дотримуватись діаметрів, кратних числу 5.

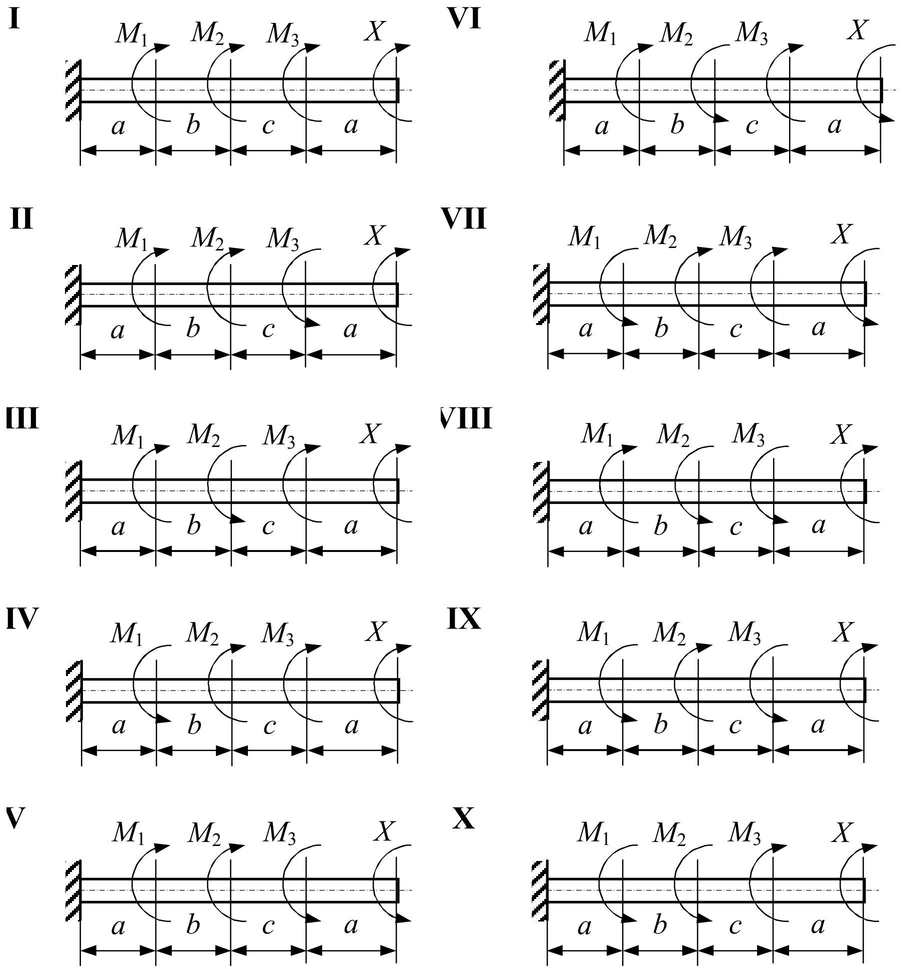


Рисунок 5.1 – Розрахункові схеми

5.2 Приклад розрахунку

Вихідні дані: a=2 м; b=1 м; c=0,5 м; M_1=2,5 кН·м; M_2=2,0 кН·м; M_3=3,0 кН·м; $[\tau]$=70 МПа.

За відповідним варіантом накреслимо в певному масштабі розрахункову схему (рис.5.2*а*).

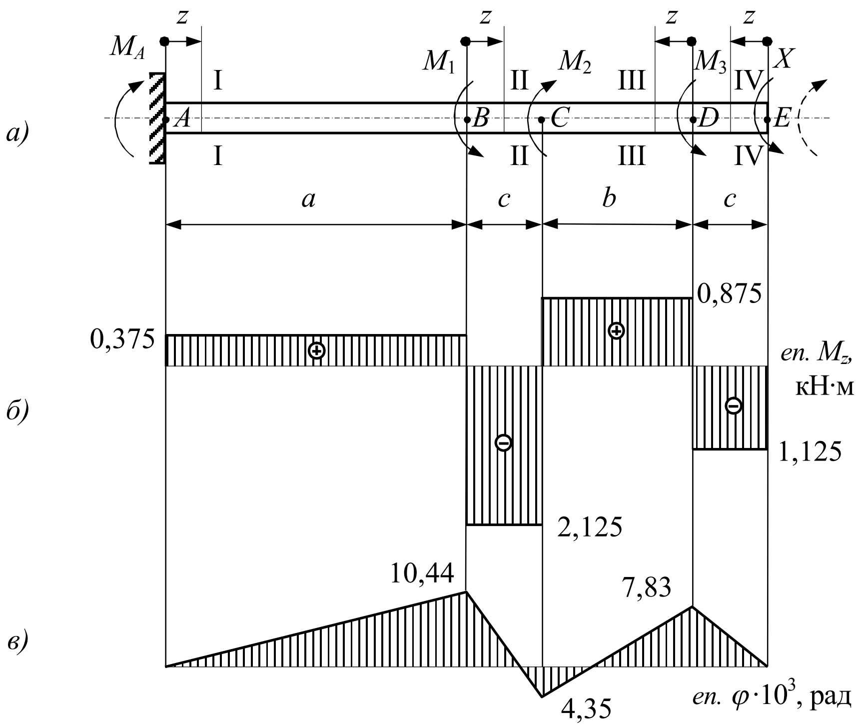


Рисунок 5.2 − Розрахункова схема і епюри крутних моментів та кутів закручування

5.2.1 Визначення невідомого моменту X

Для визначення моменту X запишемо рівняння, яке задовільняє умові, що сума кутів закручування правого кінця вала (точка E, рис.5.2*а*) від трьох моментів ($\varphi_{(E),\sum M}$) і моменту X ($\varphi_{(E),X}$) дорівнює нулю, тобто:

$$\varphi_{(E),\sum M}+\varphi_{(E),X}=0. \qquad (5.1)$$

За законом Р.Гука при крученні залежність між крутним моментом на ділянці вала довжиною l і кутом закручування одного кінцевого перерізу цієї ділянки відносно іншого має такий вид:

$$\varphi=\frac{M_{кр}\cdot l}{G\cdot J_p},$$

де l − довжина вала (або його ділянки), що закручується;
$G \cdot J_p$ − жорсткість поперечного перерізу при крученні.

Приймаємо напрямок моменту X додатним. Тоді, уявляючи, що на вал діє тільки момент X, потім тільки M_3, за ним − M_2 і нарешті − M_1, запишемо рівняння (5.1) в розгорнутому вигляді:

$$\frac{X \cdot (a+b+2c)}{G \cdot J_p} + \frac{M_3 \cdot (a+b+c)}{G \cdot J_p} - \frac{M_2 \cdot (a+c)}{G \cdot J_p} + \frac{M_1 \cdot a}{G \cdot J_p} = 0 .$$

Звідси:

$$X = \frac{M_2 \cdot (a+c) - M_3 \cdot (a+b+c) - M_1 \cdot a}{a+b+2c} =$$

$$= \frac{3 \cdot (2+0{,}5) - 2 \cdot (2+1+0{,}5) - 2{,}5 \cdot 2}{2+1+2 \cdot 0{,}5} = -1{,}125 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Значення X виявилося від’ємним, а це свідчить про те, що дійсний напрямок дії моменту X є протилежним тому, який було попередньо зображено на рисунку суцільною дуговою стрілкою. Показуємо на рисунку пунктирною дуговою стрілкою дійсний напрямок моменту X та в подальших розрахунках символом X будемо позначати модуль цього моменту.

Тепер визначимо реактивний момент в закріплені (M_A), для чого записуємо рівняння рівноваги крутних моментів для всього вала відносно його вісі:

$$\sum M_{кр}=0; \quad M_A - M_1 + M_2 - M_3 + X = 0;$$

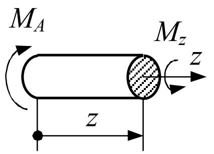
$$M_A = M_1 - M_2 + M_3 - X = 2{,}5 - 3 + 2 - 1{,}125 = 0{,}375 \text{ кН·м}.$$

Знак плюс вказує на те, що попередній напрям M_A співпадає з дійсним.

5.2.2 Побудова епюри крутних моментів M_z

Розрахункова схема має чотири ділянки: *AB*, *BC*, *CD*, *ED*. Крутний момент в перерізі вала будемо вважати додатним, якщо він діє проти годинникової стрілки, якщо дивитись на переріз з боку уявно відкинутої частини вала.

Розглядаємо рівновагу частини вала, обмеженої защемленим кінцем А і перерізом I−I.



Рівняння рівноваги для відсіченої частини вала:

$M_z+\sum \mathfrak{M}_z=0$;

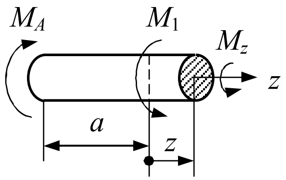
Ділянка AB (переріз I−I): $0\le z\le a$ $\quad M_z-M_A=0$.

Звідси $M_z=M_A=0{,}175$ кН·м.

Так як крутний момент на ділянці *AB* додатний і не залежить від координати *z*, то епюра M_z окреслена прямою, паралельною вісі вала (рис.5.2*б*).

Аналогічно складаємо рівняння рівноваги і визначаємо крутні моменти на інших ділянках.

Розглядаємо рівновагу частини вала, обмеженої защемленим кінцем А і перерізом II−II.

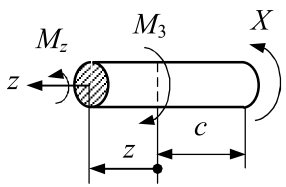


Ділянка BC (переріз II−II): $0\le z\le c$

$M_z+M_1-M_A=0$;

$M_z=M_1-M_A=-2{,}5+0{,}375=-2{,}125$кН·м$=const$ − крутний момент на ділянці BC від'ємний.

Розглядаємо рівновагу частини вала, обмеженої кінцем вала Е і перерізом III−III.

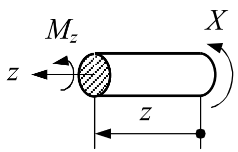


Ділянка CD (переріз III−III): $0\le z\le b$

$M_z-M_3+X=0$;

$M_z=M_3-X=2-1{,}125=0{,}875$ кН·м$=const$ − крутний момент на ділянці CD додатний.

Розглядаємо рівновагу частини вала, обмеженої кінцем вала *E* і перерізом IV−IV.



Ділянка DE (переріз IV−IV): $0\le z\le c$

$M_z+X=0$;

$M_z=-X=-1{,}125$ кН·м$=const$ − крутний момент на ділянці DE від'ємний.

Остаточна епюра крутних моментів показана на рис.5.2*б*.

Для перевірки правильності побудови епюри M_z необхідно дотримуватись наступних правил:

– на ділянках, де зовнішній розподілений момент відсутній (m=0), крутний момент є величиною сталою (M_z=*const*), а епюра окреслена прямою, паралельною вісі вала;

– на ділянках, де діє зовнішній рівномірно розподілений момент (m=*const*), крутний момент змінюється за лінійним законом, а епюра окреслена прямою, нахиленою до вісі вала;

– в перерізах (точках), де прикладені зовнішні зосереджені моменти, на епюрі M_z мають місце стрибки (розриви) на величину цих моментів.

5.2.3 Визначення діаметру вала

Аналіз епюри M_z дає можливість виявити небезпечний переріз, де крутний момент за модулем є найбільший, тобто максимальний.

Для нашого прикладу це є ділянка *BC*, де $M_{zmax}=|2{,}125|$ кН·м.

Умову міцності при крученні записуємо за формулою:

$$\tau_{max}=\frac{M_{z\,max}}{W_p}\le[\tau],$$

де $W_p=\dfrac{\pi\cdot d^3}{16}$ − полярний момент опору для круглого поперечного перерізу.

Якщо підставити значення W_p в умову міцності, будемо мати:

$$d\ge\sqrt[3]{\frac{16M_{z\max}}{\pi\cdot[\tau]}}=\sqrt[3]{\frac{16\cdot 2{,}125\cdot 10^3}{3{,}14\cdot 70\cdot 10^6}}=0{,}05368\ \text{(м)}.$$

Приймаємо стандартний діаметр d=55 мм.

5.2.4 Побудова епюри кутів закручування

Кут φ закручування вала, який складається з n ділянок, визначаємо за відомою формулою

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} \frac{M_z dz}{G \cdot J_p},$$

де l_i − довжина i-ї ділянки.

Так як на кожній ділянці жорсткість поперечного перерізу вала є величина стала ($G \cdot J_p = const$), то процедуру інтегрування можна замінити процедурою обчислення площі епюри M_z на кожній ділянці, тобто

$$\varphi = \frac{1}{G \cdot J_p} \sum_{i=1}^{n} \omega_{M_z(i)}$$

де $\omega_{M_z(i)}$ − площа епюри крутного моменту M_z на i-й ділянці, яка у нашому прикладі має форму прямокутника (рис.5.2*б*).

Починати обчислення необхідно з тієї точки (перерізу), де кут закручування відомий із умови закріплення (граничні умови).

В нашому прикладі це може бути точка A (жорстке закріплення, $\varphi_{(A)}=0$) або точка E (за умовою задачі $\varphi_{(E)}=0$).

Спочатку визначимо жорсткість поперечного перерізу вала:

$$G \cdot J_p = 8 \cdot 10^{10} \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{32} = 8 \cdot 10^{10} \cdot \frac{3{,}14 \cdot 0{,}055^4}{32} = 0{,}07183 \cdot 10^6 \text{ Н·м}^2.$$

Тепер визначимо послідовно кут закручування в точках B, C, D, E, починаючи від жорсткого закріплення.

$$\varphi_{(B)} = \varphi_{(A)} + \frac{\omega_{M_z(AB)}}{G \cdot J_p} = 0 + \frac{0{,}375 \cdot 10^3 \cdot 2}{0{,}07183 \cdot 10^6} = 10{,}44 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

де $\omega_{M_z(AB)}$ − площа епюри M_z на ділянці AB, додатна;

$$\varphi_{(C)} = \varphi_{(B)} + \frac{\omega_{M_z(BC)}}{G \cdot J_p} = 10{,}44 \cdot 10^{-3} + \frac{-2{,}125 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5}{0{,}07183 \cdot 10^6} =$$

$$= -4{,}35 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

де $\omega_{M_z(BC)}$ – площа епюри M_z на ділянці BC, від'ємна;

$$\varphi_{(D)} = \varphi_{(C)} + \frac{\omega_{M_z(CD)}}{G \cdot J_p} = -4{,}35 \cdot 10^{-3} + \frac{0{,}875 \cdot 10^3 \cdot 1}{0{,}07183 \cdot 10^6} =$$

$$= 7{,}83 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

де $\omega_{M_z(CD)}$ – площа епюри M_z на ділянці CD, додатна;

$$\varphi_{(E)} = \varphi_{(D)} + \frac{\omega_{M_z(DE)}}{G \cdot J_p} = 7{,}83 \cdot 10^{-3} + \frac{-1{,}125 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5}{0{,}07183 \cdot 10^6} \cong 0 \text{ рад},$$

де $\omega_{M_z(DE)}$ – площа епюри M_z на ділянці DE, від'ємна.

За результатами обчислення будуємо епюру кутів закручування (рис.5.2*в*), яка окреслена прямими, нахиленими до вісі вала.

5.2.5 Визначення максимального відносного кута закручування Θ_{max}

$$\Theta_{\max} = \frac{M_{z\max}}{GJ_p} = \left| \frac{2{,}125 \cdot 10^3}{0{,}07183 \cdot 10^6} \right| = 0{,}0296 \text{ рад/м}.$$

[1, С. 206-214; 2, С. 48-55].

6 РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ЗГИНАННІ ПРЯМИХ БАЛОК

6.1 Умова задачі

Для заданих двох схем балок необхідно:

а) написати вирази поперечної сили Q_y і згинального моменту M_x для кожної ділянки в загальному вигляді;

б) побудувати епюри Q_y та M_x;

в) знайти абсолютне значення максимального моменту $M_{x_{max}}$ і визначити:

– для схеми (*а*) − розміри дерев’яної балки прямокутного поперечного перерізу при співвідношеннях сторін прямокутника h/b=2 і $[\sigma]$=10 МПа;

– для схеми (*б*) − розміри сталевої балки двотаврового перерізу і перевірити їх за максимальним дотичним напруженням при $[\sigma]$=160 МПа і $[\tau]$=80 МПа.

Розрахункові схеми і вихідні дані наведені на рис.6.1 і в табл.6.1.

Таблиця 6.1 − Вихідні дані

№ рядка	l_1	l_2	Відстань в долях прогону			M, кН·м	P, кН	q, kН/м
	м		a_1/a	a_2/a	a_3/a			
1	1,1	6	1	9	1	20	10	10
2	1,2	7	2	8	2	10	9	20
3	1,3	3	3	7	3	3	8	9
4	1,4	4	4	6	4	4	7	8
5	1,5	5	5	5	5	5	6	7
6	1,6	6	6	6	1	6	5	6
7	1,7	7	7	7	2	7	4	5
8	1,8	8	8	8	3	8	3	4
9	1,9	9	9	9	4	9	10	3
0	2,0	10	2	10	5	10	20	10

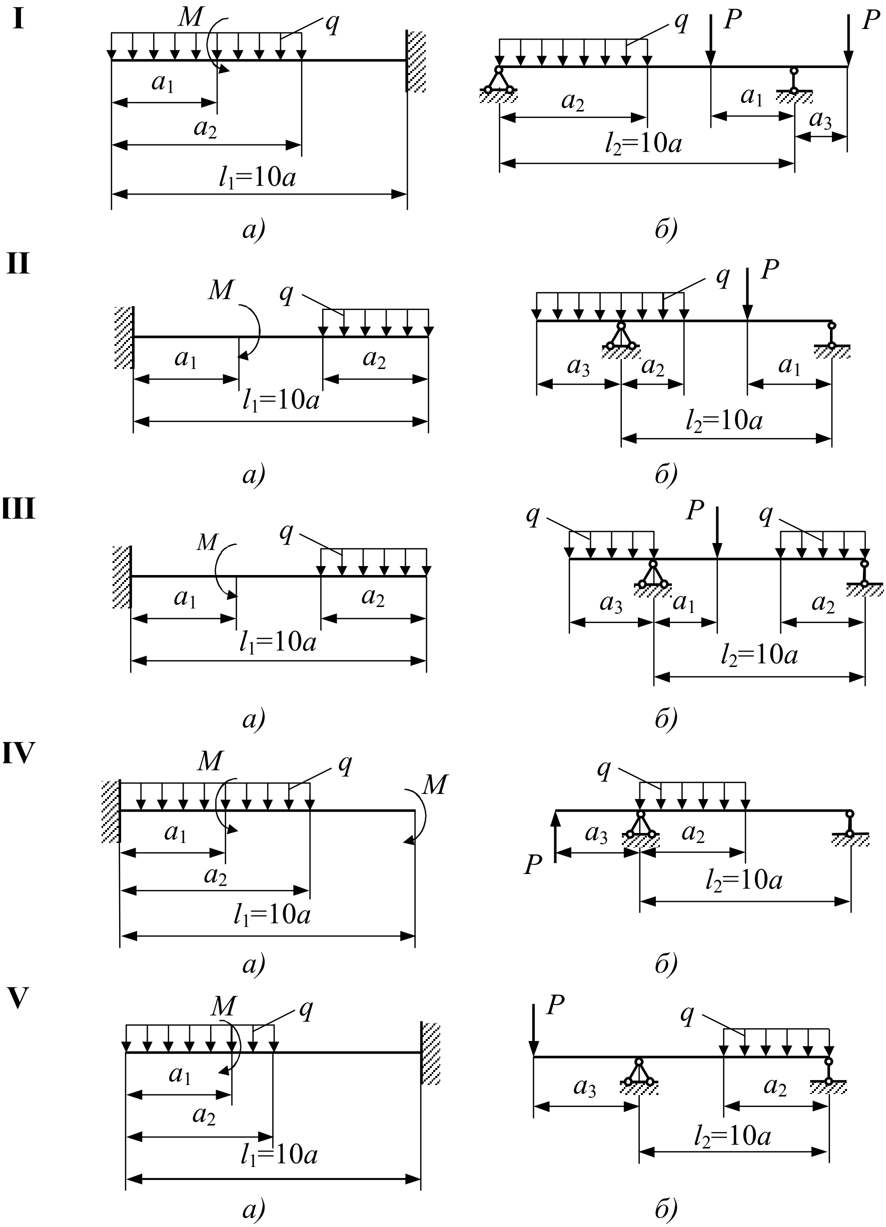
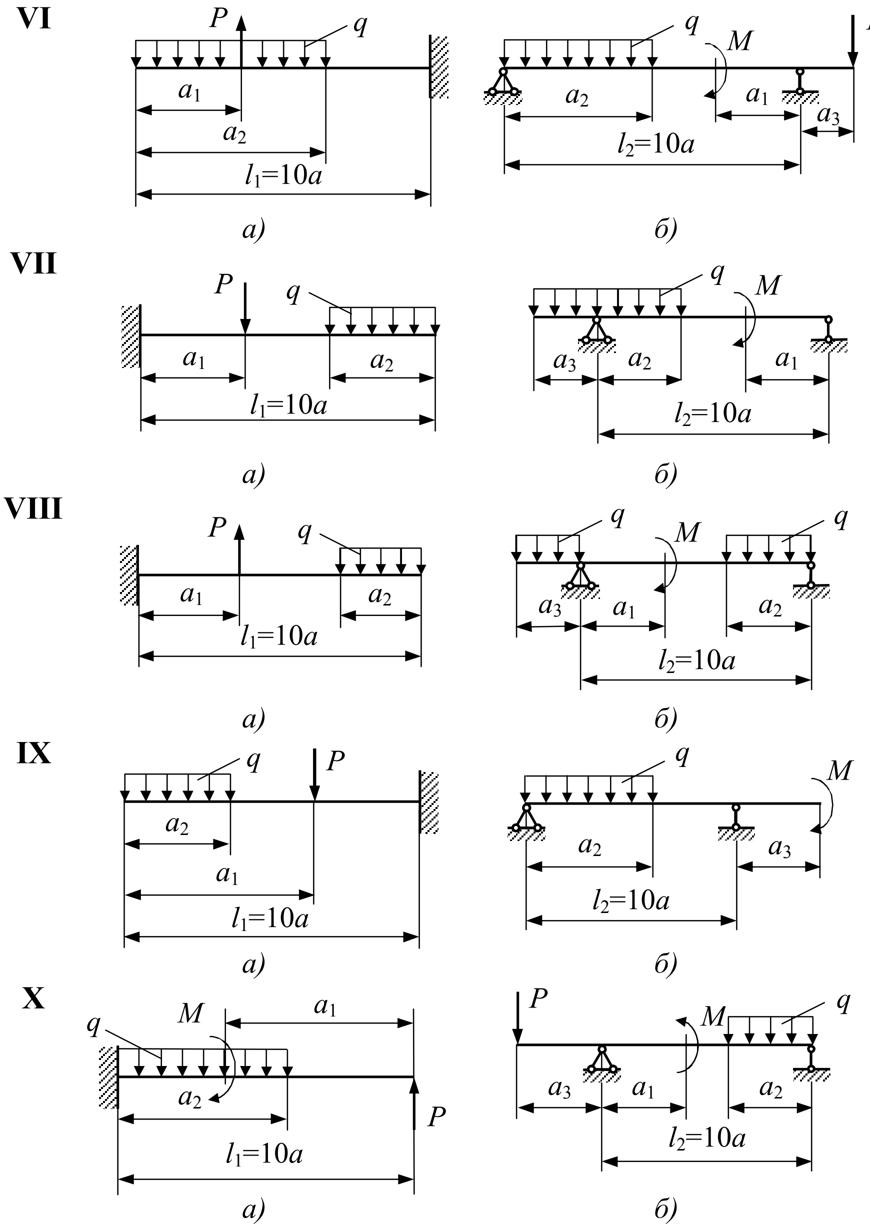


Рисунок 6.1 − Розрахункові схеми



Продовження рисунка 6.1

6.2 Приклад розрахунку консольної балки

Вихідні дані:

$$l_1=1{,}2\text{ м};\quad a_1/a=2;\quad a_2/a=4;$$

$$M=2{,}0\text{ кН·м};\quad P=2{,}0\text{ кН};\quad q=6\text{ кН/м}.$$

За відповідним варіантом накреслимо в масштабі розрахункову схему (рис.6.2*а*), попередньо визначивши довжину a_2, на якій діє розподілене навантаження, і відстань a_1, яка визначає, де знаходиться точка прикладання зосередженого моменту. Це обчислення виконуємо так.

За даними схеми відомо, що довжина консолі $l_1=10a=1{,}2$ м, звідки $a=0{,}12$ м. Тоді $a_1=2a=0{,}24$ м; $a_2=4a=0{,}48$ м.

Визначаємо реактивні силу R_A та момент M_A в жорсткому защемленні, для чого складаємо рівняння рівноваги всієї балки, прирівнявши до нуля суму проекцій усіх сил на вертикальний напрям і суму моментів всіх сил відносно точки A:

$$\sum P_{верт}=0,\quad R_A-q\cdot a_2-P+2P=0,$$

звідки: $R_A=q\cdot a_2-P=6\cdot 0{,}48-2=0{,}88$ кН;

$$\sum M_{(A)}=0,\quad M_A+q\cdot a_2\cdot\frac{a_2}{2}+P\cdot a_2+M-2P\cdot l_1=0,$$

звідки:

$$M_A=-q\cdot\frac{a_2^2}{2}-P\cdot a_2-M+2P\cdot l_1=-6\cdot 0{,}48^2/2-2\cdot 0{,}48-2+2\cdot 2\cdot 1{,}2=1{,}149\text{ кН}.$$

Реакція R_A і момент M_A мають додатний знак, а це означає, що попередній їх напрям співпадає з дійсним. Горизонтальна складова сили реакції в жорсткому защемленні дорівнює нулю, оскільки відсутні зовнішні сили, які проектувалися би на горизонтальний напрям.

Далі виділяємо на схемі три ділянки: *AB, BC, CD* (рис.6.2*а*).

Для побудови епюр поперечної сили та згинального моменту використовуємо метод перерізів. При цьому будемо дотримуватись наступних правил щодо визначення їх знаків:

– поперечна сила Q_y у перерізі додатна, якщо її вектори намагаються обертати частини розсіченої балки за годинниковою стрілкою;

– згинальний момент M_x у перерізі додатний, якщо він спричинює стискання у верхніх волокнах балки.

Розглянемо поступово всі відповідні ділянки та перерізи (рис.6.2*а*).

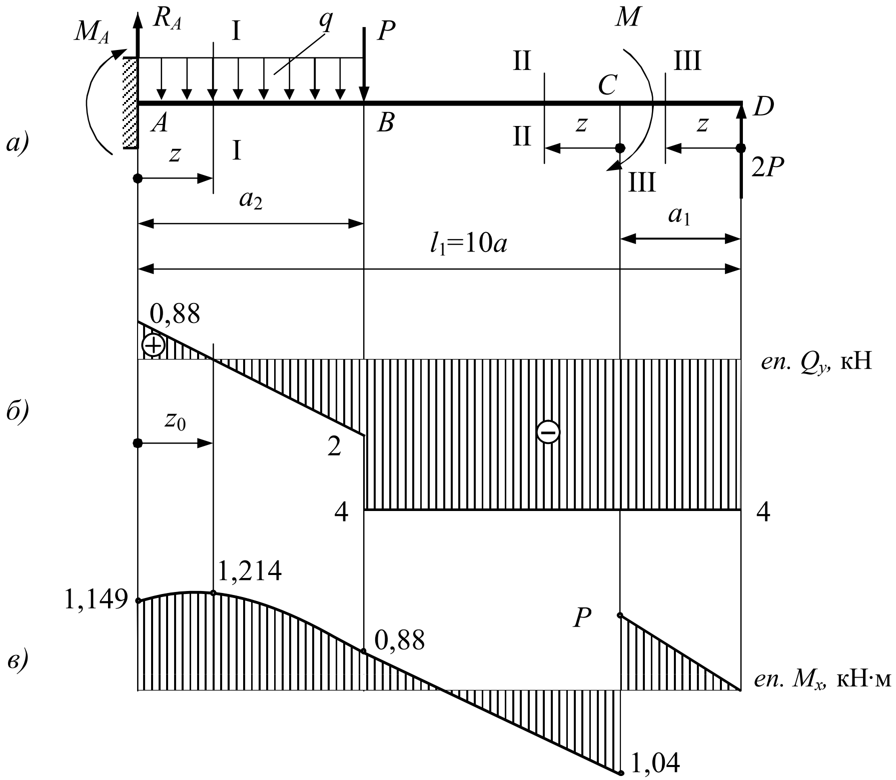
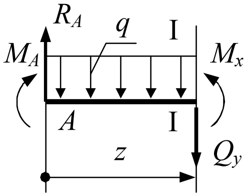


Рисунок 6.2 − Розрахункова схема і епюри поперечної сили та згинального моменту

Ділянка AB (переріз I−I): $0 \le z \le a_2$

Розглядаємо рівновагу частини балки, обмеженої защемленим кінцем А і перерізом I−I. Запишемо рівняння рівноваги відсіченої частини в загальному вигляді:



$$Q_y+\sum P_y=0; \quad M_x+\sum \mathfrak{M}_x=0,$$

де $\sum P_y$ − сума проекцій на вертикальний напрям усіх зовнішніх сил, які діють на відсічену частину;

$\sum \mathfrak{M}_x$ − сума моментів усіх зовнішніх сил відносно центра ваги перерізу I−I.

Для нашого прикладу маємо:

$$Q_y+q\cdot z-R_A=0; \quad M_x+ q\cdot z\cdot z/2-M_A-R_A\, z=0,$$

звідки: $Q_y=R_A-q\cdot z$ − це рівняння прямої лінії, нахиленої до вісі балки;

$M_x=M_A+R_A\cdot z-q\cdot z^2/2$ − це рівняння квадратичної параболи.

Визначаємо значення Q_y і M_x в крайніх точках ділянки AB:

$z=0$, точка A: $Q_y=R_A=0{,}88$ кН; $M_x=M_A=1{,}149$ кН·м;

$z=a_2=0{,}48$ м, точка B: $Q_y=R_A-q\cdot a_2=0{,}88-6\cdot 0{,}48=-2$ кН;

$M_x=M_A+R_A\cdot a_2-q\cdot z^2/2=1{,}149+0{,}88\cdot 0{,}48-6\cdot 0{,}48^2/2=0{,}88$ кН·м.

Так як Q_y в межах ділянки AB змінює знак, то необхідно визначити координату z_0 точки перетину епюри Q_y з базовою лінією, де згинальний момент має екстремальне значення. Для цього запишемо умову, що при $z=z_0$ $Q_y=0$:

$$Q_y=R_A-q\cdot z_0=0, \quad z_0=R_A/q=0{,}88/6=0{,}147 \text{ м}.$$

Тепер в точці перетину визначаємо згинальний момент:

$$M_x=M_A+R_A\cdot z_0-q\cdot z_0^2/2=1{,}149+0{,}88\cdot 0{,}147-6\cdot 0{,}147^2/2=1{,}214 \text{ кН·м}.$$

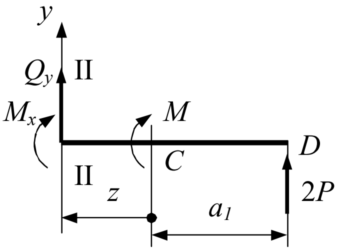
Аналогічні обчислення виконуємо на інших ділянках.

Ділянка BC (переріз II−II): $0\le z\le l_1-(a_1+a_2)$

Розглядаємо рівновагу частини балки, обмеженої вільним кінцем D і перерізом II−II.

Рівняння рівноваги: $Q_y+2P=0$;

$Q_y=-2P=-2\cdot 2=-4$кН$=const$ − тобто Q_y на ділянці BC не залежить від довільної координати z і має від'ємний знак, тому графік Q_y на ділянці BC являє собою пряму, паралельну вісі балки.



$$M_x+M-2P(a_1+z)=0;$$

$M_x=-M+2P(a_1+z)$ − це рівняння прямої лінії, нахиленої до вісі балки.

При z=0, точка C:

$M_x=-M+2P\cdot a_1=$

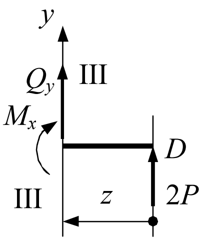
$=-2+2\cdot 2\cdot 0{,}24=-1{,}04$ кН·м; − згинальний момент від'ємний.

При $z=l_1-(a_1+a_2)=1{,}2-(0{,}24+0{,}48)=0{,}48$ м, точка B:

$M_x=-M+2P(a_1+0{,}48)=-2+2\cdot 2\cdot(0{,}24+0{,}48)=0{,}88$ кН·м − згинальний момент у поперечному перерізі балки додатний.

Розглядаємо рівновагу частини балки, обмеженої вільним кінцем D і перерізом III−III.

Ділянка DC (переріз III−III): $0\le z\le a_1$



Рівняння рівноваги: $Q_y+2P=0$;

$Q_y=-2P=-2\cdot 2=-4$ кН$=const$;

$M_x-2P\cdot z=0$; $M_x=2P\cdot z$;

При z=0, точка D $M_x=0$;

при $z=a_1$, точка C

$M_x=2P\cdot a_1=2\cdot 2\cdot 0{,}24=0{,}96$ кН·м − згинальний момент додатний.

За результатами обчислення будуємо в масштабі епюри Q_y (рис.6.2б) і M_x (рис.6.2в).

Для перевірки правильності побудови епюр необхідно дотримуватись наступних правил:

– на ділянках, де немає розподіленого навантаження (q=0), епюра Q_y (рис.6.2*б*) окреслена прямою, паралельною базі, а епюра M_x − нахиленою прямою (рис.6.2*в* − ділянка *BC* і *CD*);
– на ділянках, де діє рівномірно розподілене навантаження ($q=const$), епюра Q_y обмежується нахиленою прямою, а епюра M_x − квадратичною параболою (рис.6.2*б*, 6.2*в* − ділянка *AB*); при цьому, оскільки епюру M_x будуємо на

стиснутих волокнах, то опуклість параболи звернена в бік, протилежний напряму дії навантаження q;

- у перерізах, де Q_y=0 (змінює знак), на епюрі M_x екстремум, а дотична до епюри M_x паралельна базі (рис.6.2*б*, 6.2*в*);
- у перерізах, де до балки прикладені зосереджені сили, на епюрі Q_y будуть стрибки на значення прикладених сил (рис.6.2*б*, точки *A*, *B*, *D*), а на епюрі M_x будуть переломи, причому, вістря перелому напрямлене проти дії сили (рис.6.2*в*, точка *B*);
- у перерізах, де до балки прикладені зосереджені моменти, на епюрі M_x мають місце стрибки на значення цих моментів, а на епюрі Q_y ніяких змін не буде (рис.6.2*б*, 6.2*в*, точка *C*)[4].

Після побудови епюр Q_y і M_x знаходимо небезпечний переріз там, де діє максимальний за абсолютною величиною згинальний момент.

Для нашого прикладу:

$$M_{x,\,max}=1{,}214 \text{ кН·м (рис.6.2}\textit{в}\text{).}$$

Тепер визначимо розміри прямокутного поперечного перерізу балки із умови міцності за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{max}=\frac{M_{x,max}}{W_x}\le[\sigma],$$

де W_x − осьовий момент опору поперечного перерізу.

З умови міцності маємо:

$$W_x=\frac{M_{x,\max}}{[\sigma]}=\frac{1{,}214\cdot10^3}{10\cdot10^6}=0{,}1214\cdot10^{-3}\ \text{м}^3=121{,}4\ \text{см}^3.$$

Для прямокутного поперечного перерізу при h/b=2:

$$W_x=b\cdot h^2/6=b\cdot(2b)^2/6=2b^3/3=121{,}4\ \text{см}^3,$$

звідки $$b=\sqrt[3]{3W_x/2}=\sqrt[3]{3\cdot121{,}4/2}=5{,}668\ \text{см}\approx6\ \text{см};$$

$$h=2\cdot b=2\cdot6=12\ \text{см}.$$

[4] Напрям стрибка залежить від напряму зовнішнього моменту.

6.3 Приклад розрахунку на міцність двохопорної балки

Вихідні дані: l_2=10 м; a_1/a=4; a_2/a=8; a_3/a=2;

M=30 кН·м; P=15 кН; q=8 кН/м.

Згідно з варіантом накреслимо в масштабі розрахункову схему (рис.6.3*а*), визначивши при цьому довжини a_1, a_2, a_3:

$$l_2=10\cdot a=10\text{ м};\quad a=1\text{ м};\quad a_1=4\cdot a=4\text{ м};\quad a_2=8\cdot a=8\text{ м};\quad a_3=2\cdot a=2\text{ м}.$$

Перед побудовою епюр Q_y і M_x необхідно з рівнянь рівноваги всієї балки визначити сили реакції шарнірно-нерухомої R_A і шарнірно-рухомої R_B опор. Прирівняємо до нуля суми моментів всіх сил, які діють на балку, відносно точок A та B:

$$\sum M_{(A)}=0;\quad R_B\cdot l_2-P\cdot a_2-M-q\cdot a_2\cdot a_2/2+q\cdot a_3\cdot a_3/2=0,$$

звідки: $$R_B=\left(P\cdot a_2+M+q\frac{a_2^2}{2}-q\frac{a_3^2}{2}\right)\Big/l_2=$$

$$=(15\cdot 8+30+8\cdot 8^2/2-8\cdot 2^2/2)/10=39\text{ кН};$$

$$\sum M_{(B)}=0;\quad R_A\cdot l_2-q(a_2+a_3)[(a_2+a_3)/2+l_2-a_2]+M-P(l_2-a_2)=0,$$

звідки: $$R_A=\{q(a_2+a_3)\,[l_2-(a_2-a_3)/2]+P(l_2-a_2)-\mathrm{M}\}/l_2=$$

$$=\{8\cdot(8+2)\,[10-(8-2)/2]+15\cdot(10-8)-30\}/10=56\text{ кН}.$$

Правильність визначення реакцій перевіряємо, прирівнявши до нуля суму проекцій усіх сил, які діють на балку, на вертикальний напрям (вісь y):

$$\sum P_{\text{y}}=0;\quad R_A+R_B-q(a_2+a_3)-P=0;$$

$$56+39-8\cdot(8+2)-15=0.$$

Горизонтальна складова сили реакції шарнірно-нерухомої опори дорівнює нулю, оскільки відсутні зовнішні сили, які проектувалися би на горизонтальний напрям.

З розрахункової схеми видно, що балка має чотири ділянки: AK, AC, CD і BD.

Для побудови епюр Q_y і M_x розглянемо почергово ділянки і запишемо рівняння рівноваги для кожної відсіченої частини аналогічно попередньому прикладу.

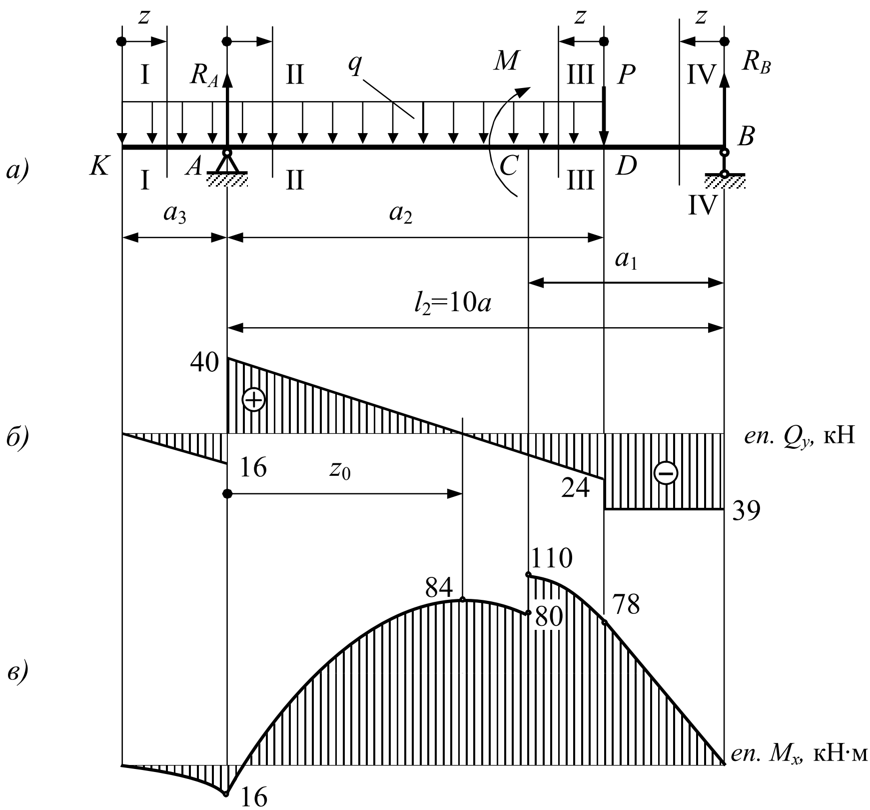
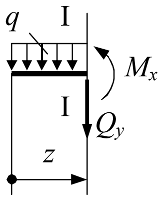


Рисунок 6.3 − Розрахункова схема і епюри поперечної сили та згинального моменту

Ділянка AK (переріз I−I): $0 \le z \le a_3 = 2$ м



Розглядаємо рівновагу частини балки, обмеженої вільним кінцем K і перерізом I−I.

$$Q_y + q \cdot z = 0; \quad Q_y = -q \cdot z;$$

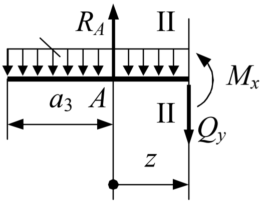
$$M_x + q \cdot z \cdot z/2 = 0; \quad M_x = -q \cdot z^2/2.$$

При $z=0$ $M_x=0$; $Q_y=0$; − точка K.

при $z=a_3$; $Q_y=-q \cdot a_3=-8 \cdot 2=-16$ кН;

$$M_x = -q \cdot a_3^2/2 = -8 \cdot 2^2/2 = -16 \text{ кН·м} - \text{точка } A.$$

Ділянка AC (переріз II−II): $0 \le z \le l_2 - a_1 = 6$ м



Розглядаємо рівновагу частини балки, обмеженої вільним кінцем K і перерізом II − II.

$$Q_y - R_A + q(a_3 + z) = 0;$$

$$M_x - R_A \cdot z + q(a_3 + z)^2/2 = 0,$$

звідки: $Q_y = R_A - q(a_3 + z)$;

$$M_x = R_A \cdot z - q(a_3 + z)^2/2.$$

Визначаємо значення Q_y і M_x в крайніх точках ділянки AC:

$$\text{при } z=0; \quad Q_y = R_A - q \cdot a_3 = 56 - 8 \cdot 2 = 40 \text{ кН};$$

$$M_x = -q \cdot \frac{a_3^2}{2} = -8 \cdot 2^2/2 = -16 \text{ кН·м} - \text{точка } A.$$

$$\text{при } z = l_2 - a_1 = 6 \text{ м}; \quad Q_y = R_A - q(a_3 + 6) = 56 - 8(2+6) = -8 \text{ кН};$$

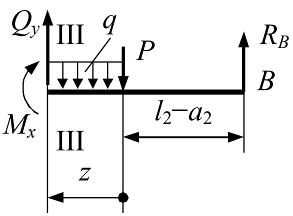
$$M_x = R_A \cdot 6 - 8 \cdot (a_3 + 6)^2/2 = 56 \cdot 6 - 8 \cdot (2+6)^2/2 = 80 \text{ кН·м} - \text{точка } C.$$

Визначимо координату z_0 точки перетину епюри Q_y з базовою лінією за умови: $z = z_0$, $Q_y = 0$, тобто:

$$Q_y = R_A - q(a_3 + z_0) = 0; \quad z_0 = \frac{R_A - q \cdot a_3}{q} = \frac{56 - 8 \cdot 2}{8} = 5 \text{ м};$$

Тоді: $M_x = R_A \cdot z_0 - q(a_3 + z_0)^2/2 = 56 \cdot 5 - 8(2+5)^2/2 = 84$ кН·м.

Ділянка DC (переріз III−III): $0 \le z \le a_1 + a_2 - l_2 = 2$ м



Розглядаємо рівновагу частини балки, обмеженої опорою B і перерізом III−III.

$$Q_y + R_B - P - q \cdot z = 0; \quad Q_y = P - R_B + q \cdot z;$$

$$M_x - R_B(l_2 - a_2 + z) + P \cdot z + q \cdot z \cdot z/2 = 0;$$

$$M_x = R_B(l_2 - a_2 + z) - P \cdot z - q \cdot z^2/2.$$

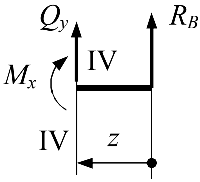
$$\text{при } z=0 \quad Q_y = P - R_B = 15 - 39 = -24 \text{ кН},$$

$$M_x = R_B(l_2 - a_2) = 39 \cdot (10 - 8) = 78 \text{ кН·м} - \text{точка } D.$$

при $z=a_1+a_2-l_2=2$ м $Q_y=-24+8\cdot 2=-8$ кН,

$M_x=R_B(l_2-a_2+2)-P\cdot 2-q\cdot 2^2/2=39\cdot(10-8+2)-15\cdot 2-8\cdot 4/2=110$ кН·м – точка C.

Ділянка BD (переріз IV−IV): $0\le z\le l_2-a_2=2$ м



Розглядаємо рівновагу частини балки, обмеженої опорою B і перерізом IV−IV.

$$Q_y+R_B=0;\quad Q_y=-R_B=-39\text{ кН}=const;$$

$$M_x-R_B\cdot z=0;\quad M_x=R_B\cdot z.$$

при $z=0$ $M_x=0$ − точка B.

при $z=l_2-a_2=2$ м $M_x=R_B\cdot 2=39\cdot 2=78$ кН·м − точка D.

За результатами обчислення будуємо епюри Q_y і M_x (рис.6.3*б*, 6.3*в*).

Правила перевірки правильності побудови епюр наведені у попередньому прикладі.

Виберемо переріз двотаврової балки з умови міцності за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{max}=M_{x_{max}}/W_x\le[\sigma].$$

Найбільший згинальний момент (небезпечний переріз) має місце в точці C з боку ділянки DC, тобто $M_{x_{max}}=110$ кН·м (рис.6.3*в*).

З умови міцності:

$$W_x=M_{x_{max}}/[\sigma]=\frac{110\cdot 10^3}{160\cdot 10^6}=0{,}6875\cdot 10^{-3}\text{ м}^3=688{,}5\text{ см}^3.$$

За таблицею сортаменту вибираємо двотавр №36, для якого $W_{x_{таб}}=743$ см^3, а $J_x=13380$ см^4.

Тоді максимальні напруження в двотаврі будуть такими:

$$\sigma_{max}=\frac{110\cdot 10^3}{0{,}743\cdot 10^{-3}}=148{,}05\cdot 10^6\text{ Па},$$

що менше за допустиме напруження на 7,5%. Це відхилення відрізняється від норми, причому в сторону збільшення коефіцієнту запасу. Нормативна розбіжність між допустимими і максимальними напруженнями знаходиться в межах ±5%.

Перевіримо міцність балки за дотичними напруженнями.

Умова міцності, згідно з формулою Д.І.Журавського, має вигляд:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{y_{max}} \cdot S_{x_{max}}}{J_x \cdot b_{(y)}} \le [\tau].$$

Ширина перерізу по нейтральній лінії (товщина стінки двотавра) $b_{(y)}=d=0,75$ см, а статичний момент половини двотавра відносно вісі x $S_{x_{max}}=423$ см^3 (таблиця сортаменту, двотавр №36).

Найбільша поперечна сила має місце в точці A з боку ділянки AC, тобто $Q_{y_{max}}=40$ кН (рис.6.3*б*).

Підставивши числові значення в умову міцності, матимемо:

$$\tau_{max} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 423 \cdot 10^{-6}}{13380 \cdot 10^{-8} \cdot 0,75 \cdot 10^{-2}} = 16,86 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$\tau_{max} = 16,86 \text{ МПа} < [\tau] = 80 \text{ МПа}.$$

Отже, розміри перерізу балки задовольняють умови міцності як за нормальними, так і за дотичними напруженнями.

[1, С. 237-255; 2, С. 56-68].

ЛІТЕРАТУРА

1. Опір матеріалів. Підручник /Г.С. Писаренко, О.А. Квітка, Е.С. Уманський; За ред. Г.С. Писаренка. − К.: Вища школа, 2004. − 655 с.

2. Контрольні завдання і методичні вказівки до виконання розрахунково-проектувальних задач з курсу „Опір матеріалів” для студентів механічних спеціальностей денної форми навчання. ІІІ семестр / Укл.: А.О. Будник, В.Г. Шевченко, О.В. Овчинников, – Запоріжжя: ЗНТУ, 2006. − 74 с.

3. Методичні вказівки для самостійної роботи і перевірки рівня засвоєння курсу „Опір матеріалів” з використанням програмного комплексу для студентів всіх спеціальностей денної форми навчання. /А. О. Будник, В. Г. Шевченко, С. Л. Рягін. − Запоріжжя: ЗНТУ, 2004. − 15 с.