

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет „Запорізька політехніка”

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання розрахунково-графічних робіт
з курсу “Опір матеріалів”
для студентів галузі знань “Механічна інженерія”
денної форми навчання

IV семестр

2019

Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних робіт з курсу “Опір матеріалів” для студентів галузі знань “Механічна інженерія” денної форми навчання. IV семестр / Укл.: В.Г. Шевченко, С.Л. Рягін, О.Г. Попович, О.С. Омельченко, А.А. Скребцов, І.А. Петрик. – Запоріжжя: НУ „Запорізька політехніка”, 2019. – 40 с.

Укладачі: *В.Г. Шевченко*, доцент, к.т.н.
С.Л. Рягін, доцент, к.т.н.
О.Г. Попович, доцент, к.т.н.
О.С. Омельченко, ст. викладач
А.А. Скребцов, доцент, к.т.н.
І.А. Петрик, ст. викладач, к.т.н.

Рецензент: *Г.Д. Фурсіна*, доцент, к.т.н.

Відповідальний
за випуск: *В.Г. Шевченко*, доцент, к.т.н., зав. каф.

Видання перероблене та доповнене.

ЗАТВЕРДЖЕНО
на засіданні кафедри механіки
Протокол № 8 від 10.04.2019 року

Рекомендовано
до видання НМК факультету
будівництва, архітектури та
дизайну
Протокол № 6 від 08.05.2019 року

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ	4
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ.....	5
1 Розрахунки на міцність при неплошому згинанні	5
2 Розрахунки на міцність при згинанні з крученням	11
3 Побудова епюр Q_y , M_x і лінії прогинів $W_{(z)}$ для статично невизначуваних нерозрізних балок	18
4 Розрахунки на стійкість стиснутих стрижнів	24
5 Розрахунки на міцність з урахуванням сил інерції	30
6 Визначення напружень в балках при ударному навантаженні	35
ЛІТЕРАТУРА	40

ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Опір матеріалів – наука про інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів конструкцій різних споруд та механізмів [1].

Опір матеріалів, як загальнотехнічна дисципліна, ґрунтується на теоретичних і дослідних даних. Тому при вивченні курсу „Опір матеріалів” студенти вивчають теорію (лекційні заняття) та виконують лабораторні роботи, які є обов’язковою частиною навчального процесу. Для кращого засвоєння теорії та опанування методами розрахунку типових елементів конструкцій студенти, в межах самостійні роботи, виконують розрахунково-графічні роботи (РГР).

Студент повинен виконувати РГР за своїм особистим варіантом, що складається з двох останніх цифр номеру його залікової книжки, де передостання цифра – номер рядка в таблиці даних, яка додається до кожної задачі, остання цифра – номер розрахункової схеми.

Наприклад, номер залікової книжки – 02047013. У цьому випадку студент виконує РГР за 13-м варіантом: схема – №3, рядок в таблиці даних – 1. Якщо остання цифра нуль, то схема №10.

У випадку отримання вихідних даних у комп’ютерному класі варіант генерується автоматично.

РГР необхідно оформлювати відповідно існуючим вимогам на аркушах паперу формату А4.

Перевірку правильності виконання РГР здійснює викладач. У випадку отримання вихідних даних у комп’ютерному класі, студент попередньо має виконати самоперевірку за допомогою відповідного програмного комплексу.

Крім того, можливо проходження студентами самоконтролю (тестування з використанням комп’ютерної техніки) за наступними темами IV семестру:

- 1 непласке згинання;
- 2 позацентрове розтягання або стискання;
- 3 згинання з крученням;
- 4 стійкість;
- 5 статично невизначувані конструкції.

Типові питання до кожної теми розглянуті у методичних вказівках [3].

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ

1 РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ НЕПЛОСКОМУ ЗГИНАННІ

1.1 Умова задачі

Дерев'яна балка прямокутного поперечного перерізу навантажена вертикальною силою P у точці A та горизонтальною силою P в точці B . Обидві сили розташовані в головних площинах інерції.

Необхідно:

- а) побудувати епюри згинальних моментів у вертикальній (M_x) та горизонтальній (M_y) площинах;
- б) знайти небезпечний переріз;
- в) підібрати розміри поперечного перерізу h та b при допустимому напруженні $[\sigma]=10$ МПа;
- г) визначити положення нейтральної лінії в небезпечному перерізі;
- д) для небезпечного перерізу побудувати епюру нормальних напружень у аксонометрії.

Примітка. Для спрощення обчислення рекомендується всі розрахунки до остаточного результату проводити в загальному вигляді.

Розрахункові схеми та вихідні дані наведені на рисунку 1.1 і в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Варіанти вихідних даних

№ рядка	P , кН	l , м	h/b	№ рядка	P , кН	l , м	h/b
1	14	1.1	2.0	6	9	1.6	1.5
2	13	1.2	1.9	7	8	1.7	1.4
3	12	1.3	1.8	8	7	1.8	1.3
4	11	1.4	1.7	9	6	1.9	1.2
5	10	1.5	1.6	0	5	2.0	1.1

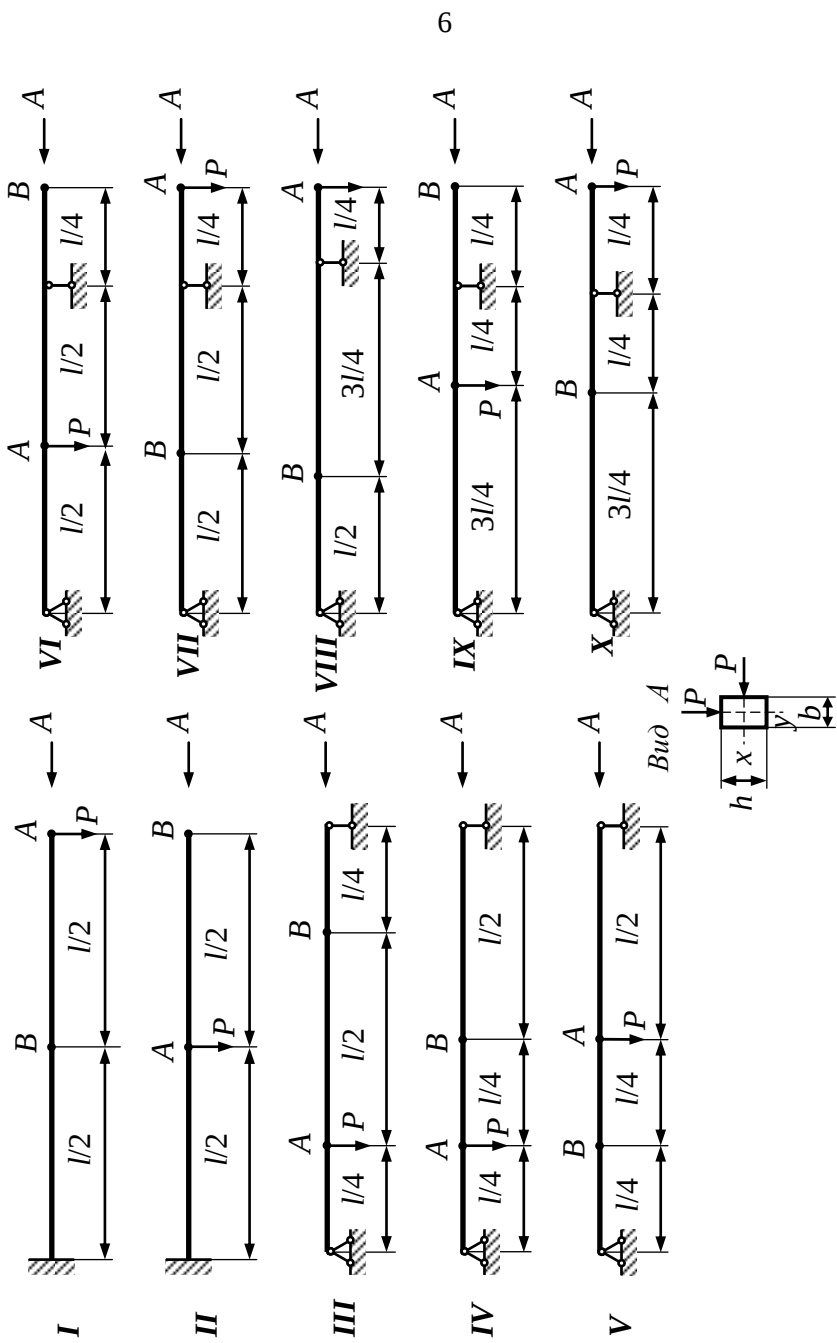


Рисунок 1.1 – Розрахункові схеми

Рисунок 1.2 – Розрахункова схема, епюри M_x та M_y

1.2.1 Побудова епюр згинальних моментів

Визначаємо реакції опор від дії горизонтальних та вертикальних зусиль P , при цьому для зручності схему для горизонтальної площини повертаємо у вертикальне положення. Будуємо епюри згинальних моментів M_x та M_y (рис. 1.2).

1.2.2 Визначення розмірів поперечного перерізу

Умова міцності для неплоского згинання має вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma].$$

Моменти опору:

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (1.2 \cdot b)^2}{6} = 0.24b^3,$$

$$W_y = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{(1.2 \cdot b) \cdot b^2}{6} = 0.2b^3.$$

З побудованих епюр видно, що згинальний момент M_x досягає найбільшого за модулем значення у поперечному перерізі, позначеному на схемі літерою A ; згинальний момент M_y досягає найбільшого за модулем значення у поперечному перерізі D . Для того щоб визначити, який із цих двох перерізів буде найбільш небезпечним, обчислюємо в них максимальні напруження:

$$\text{Точка } A: \sigma_A = \frac{0.5 \cdot P \cdot l}{0.24 \cdot b^3} + \frac{0.25 \cdot P \cdot l}{0.2 \cdot b^3} = 3.33 \cdot \frac{P \cdot l}{b^3}.$$

$$\text{Точка } D: \sigma_D = 0 + \frac{0.5 \cdot P \cdot l}{0.2 \cdot b^3} = 2.5 \cdot \frac{P \cdot l}{b^3}.$$

Порівнюючи результати обчислень, знаходимо, що найбільш небезпечним є переріз A . Тоді з умови міцності визначаємо розміри поперечного перерізу балки:

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = 3.33 \cdot \frac{P \cdot l}{b^3} = [\sigma],$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3.33 \cdot P \cdot l}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3.33 \cdot 10^4 \cdot 1}{8 \cdot 10^6}} = 0.161 \text{ м} = 16.1 \text{ см},$$

$$h = 16.1 \cdot 1.2 = 19.3 \text{ см}.$$

Визначаємо моменти опору:

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{16.1 \cdot 19.3^2}{6} = 999.5 \text{ см}^3; \quad W_y = \frac{W_x}{1.2} = 832.9 \text{ см}^3.$$

1.2.3 Побудова епюри нормальних напружень

1.2.3.1 Визначаємо напруження в кутових точках небезпечного перерізу

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} = \pm \frac{5 \cdot 10^3}{999.5 \cdot 10^{-6}} \pm \frac{2.5 \cdot 10^3}{832.9 \cdot 10^{-6}} = \pm 5 \pm 3 \text{ МПа}.$$

Знак напружень в кутових точках визначається координатою x чи y в системі, яка зазначена на схемі рис.1.2. Від моменту M_x стиснуті верхні волокна (т. 1 і 2), від моменту M_y стиснуті волокна лівої частини (т. 1 і 4). Знаки напружень у крайніх точках перерізу, які виникають від згинальних моментів M_x і M_y , показано на рис. 1.3.

Наприклад, для точки 1: $y = -h/2$; $x = -b/2$; тоді

$$\begin{aligned} \sigma_{(1)} &= \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x = \frac{M_x}{I_x} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) + \frac{M_y}{I_y} \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) = \\ &= -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} = -5 - 3 = -8 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Аналогічно: $\sigma_{(2)} = -5 + 3 = -2 \text{ МПа};$

$$\sigma_{(3)} = +5 + 3 = +8 \text{ МПа}; \quad \sigma_{(4)} = +5 - 3 = +2 \text{ МПа}.$$

1.2.3.2 Визначаємо положення нейтральної лінії:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} = -\frac{0.25 \cdot P \cdot l}{0.5 \cdot P \cdot l} \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^2 = -0.72, \quad \text{де } \frac{I_x}{I_y} = \left(\frac{h}{b}\right)^2;$$

тоді $\alpha = \arctg(-0.72) = -36^\circ$.

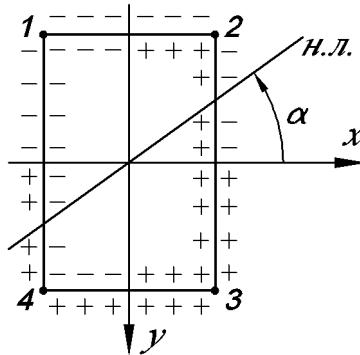


Рисунок 1.3 – Знаки нормальних напружень від згинальних моментів M_x (показано зовні контуру перерізу) і M_y (показано всередині контуру перерізу)

1.2.3.3 Будуємо епюру нормальних напружень в аксонометрії:

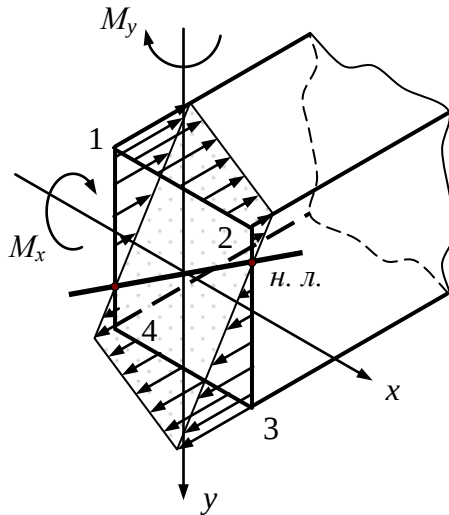


Рисунок 1.4 – Епюра нормальних напружень в аксонометрії

[1, С. 325-332; 2, С. 5-10].

2 РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ЗГИНАННІ З КРУЧЕННЯМ

2.1 Умова задачі

Шків діаметром D_1 із кутом нахилу віток пасу до горизонту α_1 робить n обертів за хвилину і передає потужність N кВт. Два інших шківів мають однаковий діаметр D_2 і однакові кути нахилу віток пасу до горизонту α_2 , кожен з них передає потужність $N/2$.

Необхідно:

- а) визначити крутні моменти, які діють на шківів, та побудувати епюру крутних моментів $M_{кр}$ у поперечних перерізах вала;
- б) визначити колові зусилля та сили радіального тиску на вал;
- в) накреслити розрахункову схему і показати повну систему зусиль, що діють на вал;
- г) побудувати епюри згинальних моментів M_x і M_y у вертикальній та горизонтальній площинах;
- д) побудувати епюру сумарних згинальних моментів $M_{зг}$;
- е) знайти, з аналізу епюр $M_{кр}$ і $M_{зг}$, небезпечний переріз та максимальний розрахунковий момент за третьою теорією міцності;
- ж) визначити діаметр валу при $[\sigma]=70$ МПа та округлити його до стандартної величини.

Розрахункові схеми та вихідні дані наведені на рисунку 2.1 і в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Вихідні дані

№ рядка	N , кВт	n , об/хв	a , м	b , м	c , м	D_1 , м	D_2 , м	α_1°	α_2°
1	10	100	1.1	1.5	1.8	1.1	1.0	10	0
2	20	200	1.2	1.6	1.9	1.2	1.9	20	90
3	30	300	1.3	1.7	1.0	1.3	1.8	30	80
4	40	400	1.4	1.8	1.1	1.4	1.7	40	70
5	50	500	1.5	1.9	1.2	1.5	1.6	50	60
6	60	600	1.6	1.1	1.3	1.6	1.5	60	50
7	70	700	1.7	1.2	1.4	1.7	1.4	70	40
8	80	800	1.8	1.3	1.5	1.8	1.3	80	30
9	90	900	1.9	1.4	1.6	1.9	1.2	90	20
0	100	1000	1.0	1.0	1.7	1.0	1.1	0	10

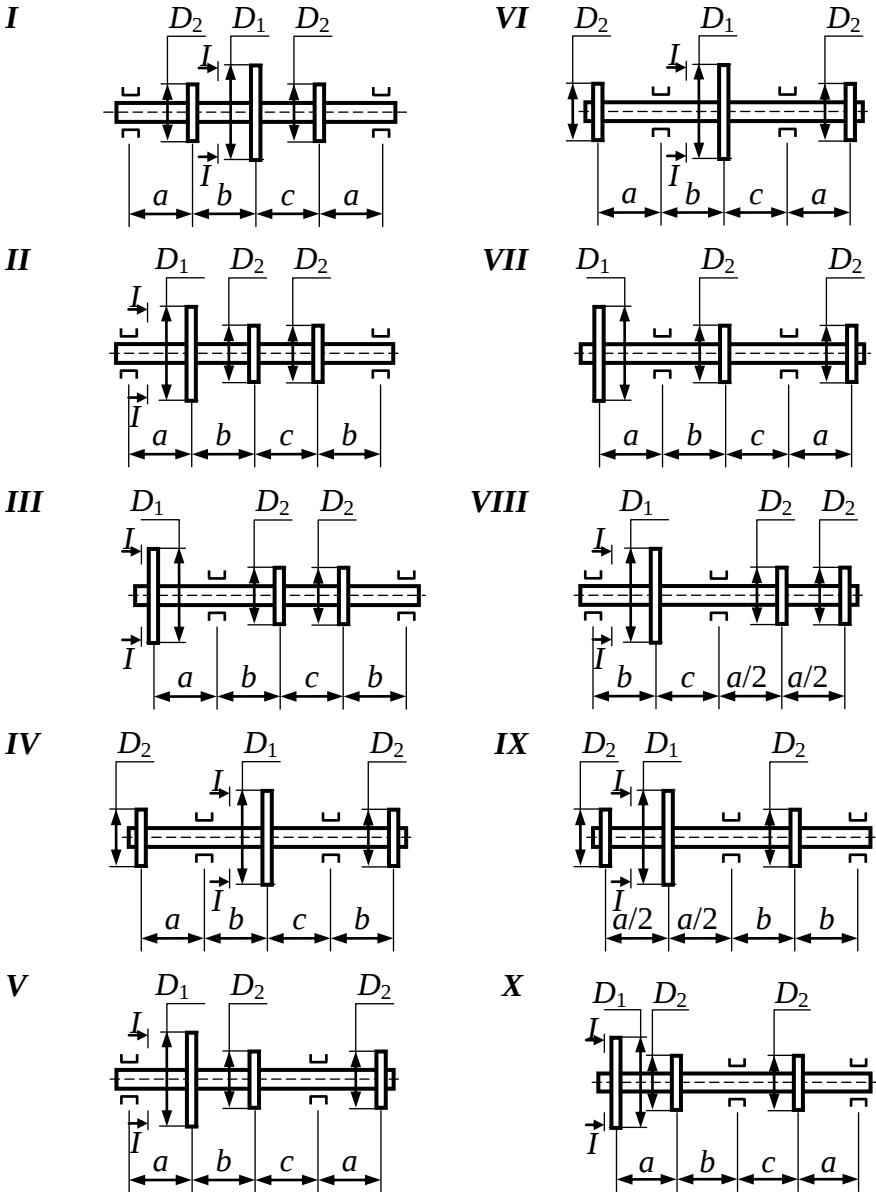


Рисунок 2.1 – Розрахункові схеми

2.2 Приклад розрахунку

Вихідні дані: $N=100$ кВт; $n=1000$ об/хв;
 $a=b=1$ м; $D_1=1$ м; $D_2=0.5$ м;
 $\alpha_1=60^\circ$; $\alpha_2=30^\circ$.

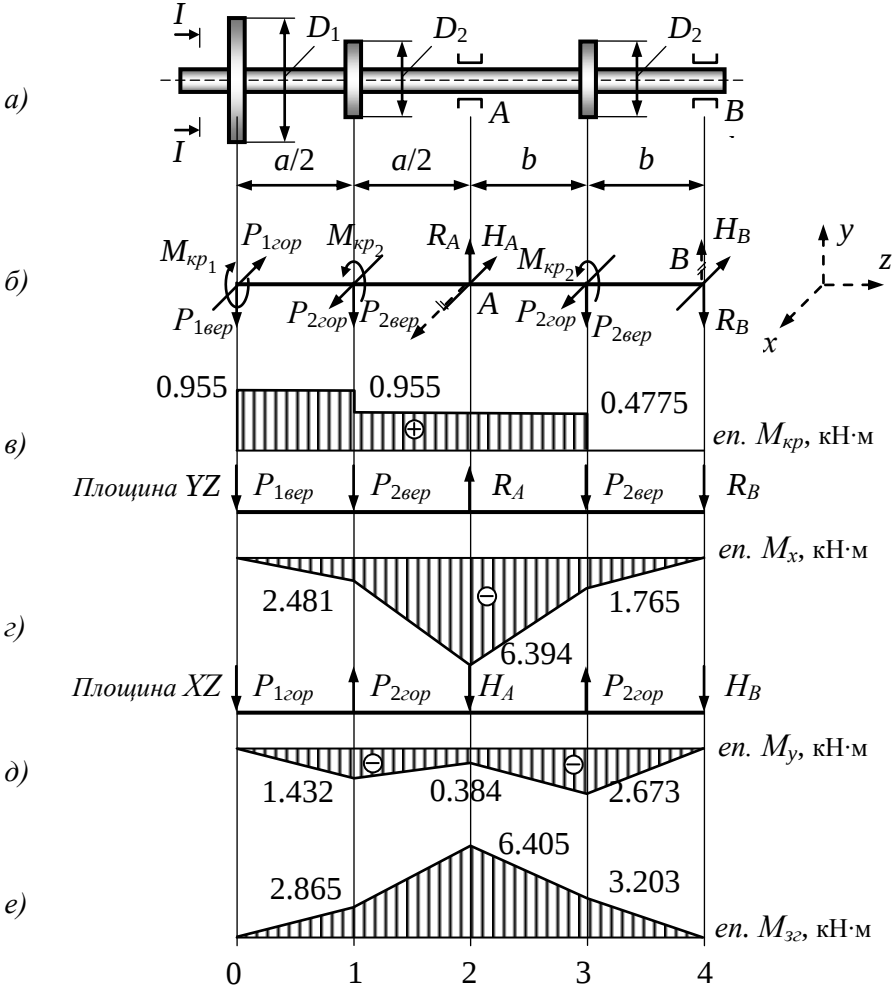
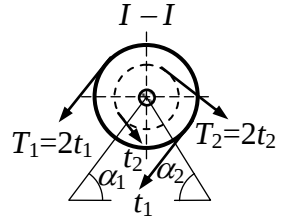


Рисунок 2.2— Розрахункові схеми, епюри M_x , M_y , $M_{кр}$, M_{32}

На кожен шків з боку пасу діють сили натягу ведучої та веденої вітки пасу. Для шківа діаметром D_1 ці сили позначено T_1 і t_1 ; система сил T_1 і t_1 статично еквівалентна сукупності сили радіального тиску P_1 і пари сил з моментом $M_{кр1}$. Тому на рис. 2.2, б зображено вал, на який з боку шківів діють крутні моменти, горизонтальні та вертикальні складові сил радіального тиску, а також горизонтальні та вертикальні складові сил реакцій підшипників.

2.2.1 Визначаємо крутні моменти $M_{кр}$ на шківках D_1 і D_2

$$M_{кр1}=9.55N/n=0.955 \text{ кНм};$$

$$M_{кр2}=0.5M_{кр1}=0.4775 \text{ кНм}.$$

2.2.2 Визначаємо колові зусилля t_1 , t_2 і сили радіального тиску на вал P_1 , P_2

$$t_1 = \frac{2M_{кр1}}{D_1} = \frac{2 \cdot 0.955}{1} = 1.91 \text{ кН};$$

$$t_2 = \frac{2M_{кр2}}{D_2} = \frac{2 \cdot 0.4775}{0.5} = 1.91 \text{ кН};$$

$$P_1=3t_1=3 \cdot 1.91=5.73 \text{ кН}; \quad P_2=3t_2=3 \cdot 1.91=5.73 \text{ кН}.$$

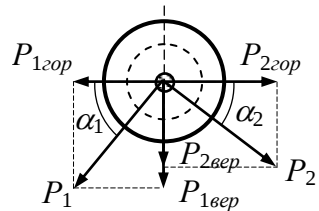
2.2.2.1 Визначаємо горизонтальні та вертикальні складові сил радіального тиску на вал:

$$P_{1гор}=P_1 \cdot \cos \alpha_1=5.73 \cdot \cos 60^\circ=2.865 \text{ кН};$$

$$P_{2гор}=P_2 \cdot \cos \alpha_2=5.73 \cdot \cos 30^\circ=4.962 \text{ кН};$$

$$P_{1вер}=P_1 \cdot \sin \alpha_1=5.73 \cdot \sin 60^\circ=4.962 \text{ кН};$$

$$P_{2вер}=P_2 \cdot \sin \alpha_2=5.73 \cdot \sin 30^\circ=2.865 \text{ кН}.$$



2.2.3 Визначасмо горизонтальні та вертикальні складові сил реакцій опор вала

2.2.3.1 Вертикальна площина

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0; \quad R_A &= \frac{P_{1\text{вер}}(2b + a) + P_{2\text{вер}}\left(3b + \frac{a}{2}\right)}{2b} = \\ &= \frac{4.962 \cdot 3 + 2.865 \cdot 3.5}{2} = 12.457 \quad \text{кН};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum P_Y = 0; \quad R_B &= P_{1\text{вер}} + 2P_{2\text{вер}} - R_A = 4.962 + 2 \cdot 2.865 - 12.457 = \\ &= -1.765 \quad \text{кН} \quad - \text{направлена вниз, напрям змінюємо на протилежний}.\end{aligned}$$

2.2.3.2 Горизонтальна площина

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0; \quad H_A &= \frac{P_{1\text{гор}}(2b + a) - P_{2\text{гор}}\left(3b + \frac{a}{2}\right)}{2b} = \\ &= \frac{2.865 \cdot 3 - 4.962 \cdot 3.5}{2} = \\ &= -4.386 \quad \text{кН} \quad - \text{направлена ліворуч};\end{aligned}$$

Значення H_A виявилося від'ємним, а це свідчить про те, що дійсний напрямок дії сили H_A є протилежним тому, який було попередньо зображено на рисунку. Показуємо на рисунку дійсний напрямок сили H_A та в подальших розрахунках символом H_A будемо позначати модуль цієї сили.

$$\sum P_X = 0; \quad H_B = H_A + P_{12op} - 2P_{22op} = 4.386 + 2.865 - 2 \cdot 4.962 =$$

$$= -2.673 \text{ кН} \quad - \text{ наведена ліворуч, тобто не}$$

$$\text{співпадає з попереднім напрямом.}$$

2.2.4 Будуємо епюру $M_{кр}$ (рис.2.2в)

2.2.5 Визначаємо згинальні моменти в вертикальній і горизонтальній площинах для характерних перерізів, будуємо епюри M_x і M_y (рис.2.2д; 2.2е)

2.2.6 Будуємо сумарну епюру згинальних моментів, попередньо визначивши їх величину в характерних точках 1, 2, 3 (рис.2.2е) за формулою

$$M_{32} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2}, \text{ тобто}$$

$$M_{32(1)} = \sqrt{2.481^2 + 1.432^2} = 2.865 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{32(2)} = \sqrt{6.394^2 + 0.384^2} = 6.405 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{32(3)} = \sqrt{1.765^2 + 2.673^2} = 3.203 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Примітка. Необхідно пам'ятати, що вектор моменту M_{32} в різних перерізах може мати різні напрями, внаслідок чого епюра M_{32} може бути криволінійною (рис.2.2е; ділянки 1–2, 2–3).

2.2.7 Визначаємо небезпечний переріз і величину M_p^{III} у ньому

Небезпечним перерізом є той, в якому еквівалентний момент за третьою теорією міцності M_p^{III} досягає максимального значення.

Для нашого прикладу це переріз в т. 2 (опора А), де:

$$M_{кр} = 0.4775 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{32} = 6.405 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Тому:

$$M_p^{III} = \sqrt{M_{3z}^2 + M_{kp}^2} = \sqrt{6.407^2 + 0.4775^2} = 6.423 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

2.2.8 *Визначаємо діаметр вала*

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_p^{III}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6.423 \cdot 10^3}{3.14 \cdot 70 \cdot 10^6}} = 9.78 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Округлюючи розрахунковий діаметр до стандартних величин, передбачених ГОСТ 6636-69, одержуємо – $d_{табл}=100$ мм.

[1, С. 338-342; 2, С. 20-25].

3 ПОБУДОВА ЕПЮР Q_y , M_x І ЛІНІЇ ПРОГІНІВ $W_{(z)}$ ДЛЯ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ НЕРОЗРІЗНИХ БАЛОК

3.1 Умова задачі

Статично невизначувана нерозрізна балка навантажена розподіленим та зосередженим зусиллями.

Необхідно:

- а) розкрити статичну невизначуваність балки і визначити реакції опор (в долях ql);
- б) побудувати епюри перерізуючих сил Q_y та згинальних моментів M_x ;
- в) побудувати епюру прогинів W та обчислити їх значення у характерних точках.

Розрахункові схеми та вихідні дані наведені на рисунку 3.1 і в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Вихідні дані

№ рядка	Коефіцієнти		№ рядка	Коефіцієнти	
	α	β		α	β
1	0.1	1.0	6	0.6	1.5
2	0.2	0.9	7	0.7	0.4
3	0.3	0.8	8	0.8	0.3
4	0.4	0.7	9	0.9	0.2
5	0.5	0.6	0	1.0	0.1

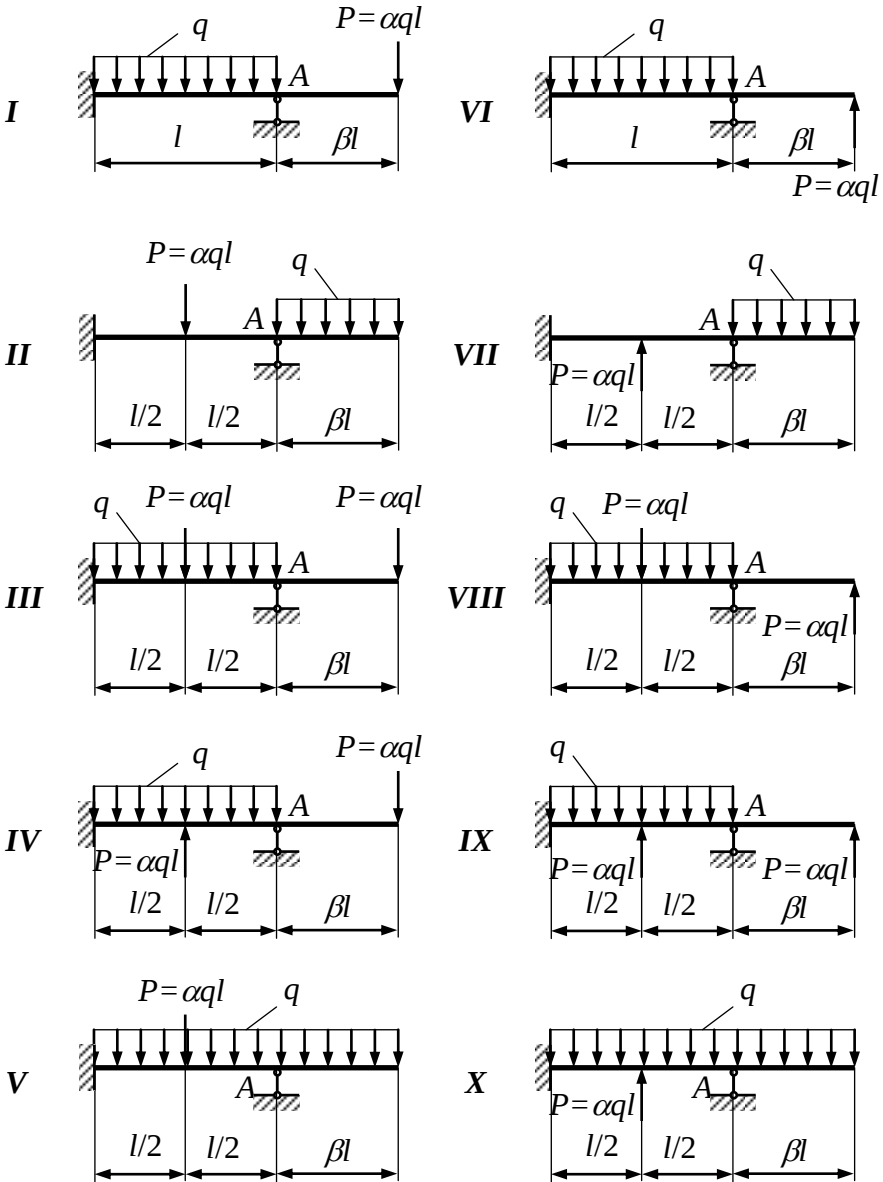


Рисунок 3.1 – Розрахункові схеми

3.2 Приклад розрахунку

Вихідні дані: $\alpha=1$; $\beta=1$.

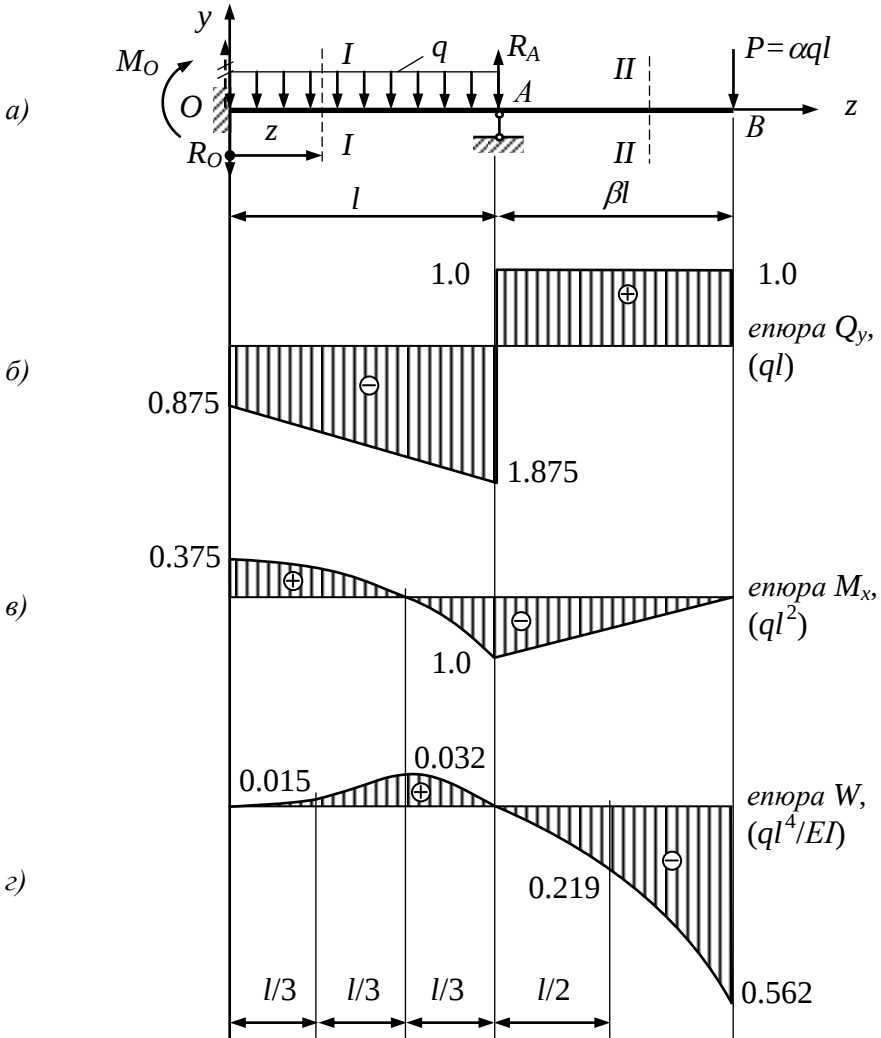


Рисунок 3.2– Розрахункова схема, епюри M_x , Q_y та $W_{(z)}$

Статичну невизначуваність розв'язуємо за допомогою рівнянь статики та метода початкових параметрів.

3.2.1 *Визначаємо момент та реакцію на лівій опорі M_O і R_O*

Для цього складаємо два рівняння.

3.2.1.1 *Рівняння статики у вигляді суми моментів всіх зовнішніх зусиль відносно правої опори A (рис. 3.2а):*

$$\sum M_A = 0; \quad M_O + R_O \cdot l - \frac{ql^2}{2} + ql^2 = 0, \quad (3.1)$$

де $P \cdot \beta \cdot l = ql^2$.

3.2.1.2 *Рівняння метода початкових параметрів для першої ділянки (рис. 3.2а):*

$$EI_x W_z = EI_x W_O + EI_x \varphi_O \cdot z + \frac{M_O \cdot z^2}{2} + \frac{R_O \cdot z^3}{6} - \frac{q \cdot z^4}{24}.$$

При $z=0$: $W_{(0)}=0$; $\varphi_O=0$ (жорстке закріплення).

При $z=l$: $W_{(l)}=0$ (шарнірна опора). Тоді, підставивши записані граничні умови у рівняння методу початкових параметрів, отримаємо:

$$\frac{M_O \cdot l^2}{2} + \frac{R_O \cdot l^3}{6} - \frac{ql^4}{24} = 0. \quad (3.2)$$

Із рівняння (3.2) визначаємо:

$$R_O = -\frac{3M_O}{l} + \frac{ql}{4}.$$

Із рівняння (3.1) визначаємо:

$$M_O + \left(\frac{ql}{4} - \frac{3M_O}{l} \right) \cdot l - \frac{ql^2}{2} + ql^2 = 0; \quad M_O = \frac{3ql^2}{8} = 0.375ql^2.$$

Тоді: $R_O = -0.875 \cdot ql$ – на рисунку напрям R_O змінюємо на протилежний та в подальших розрахунках символом R_O будемо позначати модуль цієї сили.

3.2.2 Визначаємо реакцію R_A

Складаємо рівняння статки у вигляді суми моментів всіх зовнішніх зусиль відносно лівої опори O :

$$\sum M_O = 0; \quad R_A \cdot l - M_O - \frac{ql^2}{2} - 2ql^2 = 0; \quad R_A = 2.875ql.$$

3.2.3 Визначаємо Q_y і M_x

Ділянка OA , переріз $I-I$: $0 \leq z \leq l$.

$$Q_y = -R_O - qz; \quad M_x = M_O - R_O \cdot z - \frac{qz^2}{2};$$

при $z=0$ знаходимо: $Q_y = -R_O = -0.875ql$; $M_x = M_O = 0.375ql^2$;

при $z=l$ знаходимо:

$$\begin{cases} Q_y = -0.875ql - ql = -1.875ql; \\ M_x = 0.375ql^2 - 0.875ql^2 - 0.5ql^2 = -ql^2. \end{cases}$$

Ділянка AB , переріз $II-II$: $0 \leq z \leq l$.

$$Q_y = q \cdot l; \quad M_x = -q \cdot l \cdot z;$$

при $z=0$ знаходимо: $Q_y = q \cdot l$; $M_x = 0$;

при $z=l$ знаходимо: $Q_y = q \cdot l$; $M_x = -q \cdot l^2$.

За відомими даними будуємо епюри Q_y та M_x (рис.3.2б, 3.2в).

3.2.4 Визначаємо прогини балки

Початок координат системи uz вибираємо в закріпленні (точка O). Тоді початкові параметри W_O і φ_O дорівнюють нулю ($W_O=0$; $\varphi_O=0$) і рівняння прогинів набуває вид:

Ділянка OA : $0 \leq z \leq l$.
$$EI_x W_z = \frac{M_O \cdot z^2}{2} - \frac{R_O \cdot z^3}{6} - \frac{q \cdot z^4}{24}$$

1. $z=0$; $W_{(0)}=0$.
3. $z = \frac{2l}{3}$; $W_{\left(\frac{2l}{3}\right)} = 0.032 \frac{ql^4}{EI_x}$.
2. $z = \frac{1}{3}l$; $W_{\left(\frac{1}{3}l\right)} = 0.015 \frac{ql^4}{EI_x}$.
4. $z=l$; $W_{(l)}=0$.

Ділянка AB : $l \leq z \leq 2l$.

$$EI_x W_z = \frac{M_O \cdot z^2}{2} - \frac{R_O \cdot z^3}{6} - \frac{q \cdot z^4}{24} + \frac{R_A(z-l)^3}{6} + \frac{q(z-l)^4}{24};$$

$$z = 1.5l;$$

$$z = 2l;$$

1. $W_{(1.5l)} = -0.219 \frac{ql^4}{EI_x}$.
2. $W_{(2l)} = -0.562 \frac{ql^4}{EI_x}$.

Епюра прогинів показана на рис.3.2г.

[1, С. 404-442; 2, С. 26-31].

4 РОЗРАХУНКИ НА СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТРИЖНІВ

4.1 Умова задачі

Сталевий стрижень довжиною l стискається силою P .

Необхідно:

- знайти розміри поперечного перерізу при допустимому напруженні $[\sigma]=160$ МПа (розрахунки виконувати послідовними наближеннями);
- знайти критичну силу і коефіцієнт запасу стійкості.

Розрахункові схеми і вихідні дані наведені на рисунках 4.1 і 4.2 та в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Вихідні дані

№ рядка	P , кН	l , м	Схема закріплення
1	100	2.1	1
2	200	2.2	
3	300	2.3	2
4	400	2.4	
5	500	2.5	3
6	600	2.6	
7	700	2.7	4
8	800	2.8	
9	900	2.9	5
0	1000	3.0	

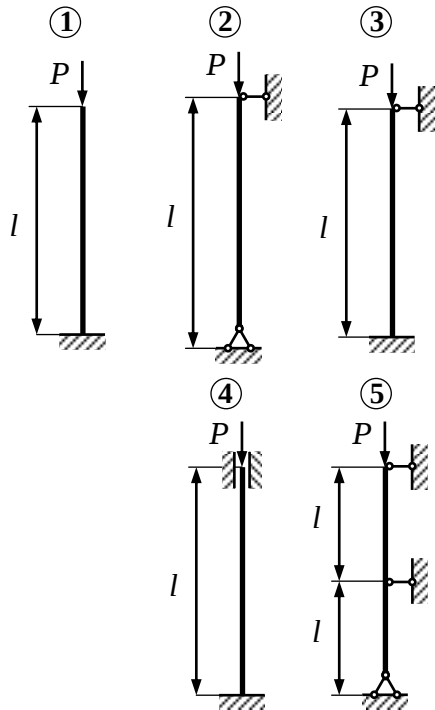


Рисунок 4.1 – Схеми закріплення

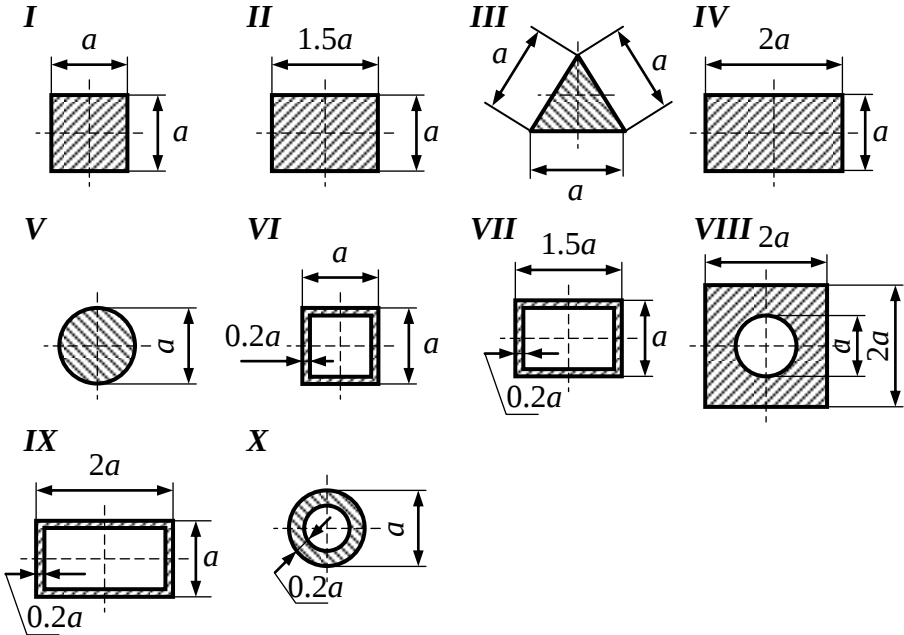
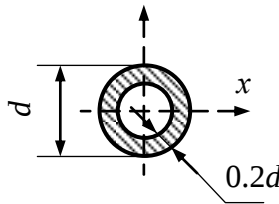
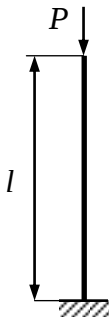


Рисунок 4.2 – Поперечні перерізи стрижнів

4.2 Приклад розрахунку



Вихідні дані: $P=200$ кН;
 $l=2.1$ м;
 $E=2 \cdot 10^5$ МПа;
 $[\sigma]=160$ МПа.

Розміри поперечного перерізу визначаємо з умови стійкості:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \varphi \cdot [\sigma].$$

Розв'язуємо задачу методом послідовних наближень.

Коефіцієнт зменшення допустимого напруження для першого наближення приймаємо $\varphi_1 = 0.5$, тобто середнє значення інтервалу $0 \leq \varphi \leq 1$.

4.2.1 Перше наближення: $\varphi_1=0.5$.

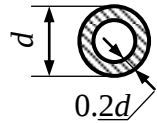
4.2.1.1 Визначаємо розміри поперечного перерізу

З одного боку, площа поперечного перерізу визначається з умови стійкості:

$$F = \frac{P}{\varphi_1[\sigma]}; \quad F = \frac{200 \cdot 10^3}{0.5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 25 \text{ см}^2.$$

З іншого боку, площа поперечного перерізу розраховується як площа кільцевого перерізу:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} - \frac{\pi}{4}(d - 2 \cdot 0.2d)^2 = 0.160 \cdot \pi d^2.$$



Тоді зовнішній діаметр кільцевого перерізу:

$$d = \sqrt{\frac{F}{0.16\pi}} = \sqrt{\frac{25}{0.16\pi}} = 7.05 \text{ см.}$$

4.2.1.2 Розраховуємо момент інерції та гнучкість стрижня

Визначаємо мінімальний момент інерції кільцевого перерізу, мінімальний радіус інерції $i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{F}}$, а також гнучкість стрижня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} :$$

$$I_{min} = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{\pi}{64}(d - 0.4d)^4 = 13.6 \cdot 10^{-3} \pi d^4.$$

Тоді:
$$i_{min} = \sqrt{\frac{13.6 \cdot 10^{-3} \pi d^4}{0.16 \pi d^2}} = 0.292d = 0.292 \cdot 7.05 = 2.06 \text{ см};$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 210}{2.06} = 204.$$

4.2.1.3 Обираємо коефіцієнт зменшення допустимого напруження з таблиць залежності $\varphi=f(\lambda)$: $\varphi'_1 = 0.19$.

4.2.1.4 Виконуємо перевірку на стійкість

$$\sigma = \frac{P}{\varphi'_1 \cdot F} = \frac{200 \cdot 10^3}{0.19 \cdot 2.5 \cdot 10^{-3}} = 421 \text{ МПа} > 160 \text{ МПа}.$$

Оскільки напруження значно перевищує допустиме, то необхідно зробити ще одне наближення.

4.2.2 Друге наближення

4.2.2.1 Розраховуємо коефіцієнт зменшення напруження як середнє арифметичне:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0.5 + 0.19}{2} = 0.345.$$

4.2.2.2 Визначаємо розміри поперечного перерізу

Відповідно, перераховуємо площу, діаметр труби, мінімальний радіус інерції:

$$F = \frac{P}{\varphi_2 \cdot [\sigma]} = \frac{200 \cdot 10^3}{0.345 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3.62 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 36.2 \text{ см}^2;$$

$$d = \sqrt{\frac{F}{0.16\pi}} = \sqrt{\frac{36.2}{0.16\pi}} = 8.49 \text{ см};$$

$$i_{\min} = 0.292d = 2.48 \text{ см}.$$

4.2.2.3 Визначаємо гнучкість стрижня

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 210}{2.48} \cong 170.$$

4.2.2.4 Обираємо новий коефіцієнт зменшення допустимого напруження з таблиць залежності $\varphi=f(\lambda)$: $\varphi'_2 = 0.26$.

4.2.2.5 Виконуємо наступну перевірку на стійкість

$$\sigma = \frac{P}{\varphi'_2 \cdot F} = \frac{200 \cdot 10^3}{0.26 \cdot 3.62 \cdot 10^{-3}} = 212 \text{ МПа} > 160 \text{ МПа}.$$

Напруження перевищує допустиме на 32.5%, тому знову переходимо до наступного наближення.

4.2.3 Наступне наближення

4.2.3.1 Розраховуємо коефіцієнт зменшення напруження, розмір поперечного перерізу та гнучкість стрижня

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0.345 + 0.26}{2} = 0.303;$$

$$F = \frac{P}{\varphi_3 \cdot [\sigma]} = \frac{200 \cdot 10^3}{0.303 \cdot 160 \cdot 10^6} = 4.13 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 4.13 \text{ см}^2;$$

$$d = \sqrt{\frac{F}{160\pi}} = \sqrt{\frac{41.3}{0.16\pi}} = 9.06 \text{ см. } i_{\min} = 0.292 \cdot 9.06 = 2.64 \text{ см.}$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 210}{2.64} \cong 159.$$

4.2.3.2 Обираємо коефіцієнт зменшення допустимого напруження з таблиць залежності $\varphi=f(\lambda)$. Його значення уточнюємо за допомогою лінійної інтерполяції:

λ	φ
150	0.32
160	0.29

$$\varphi'_3 = 0.32 - \frac{0.32 - 0.29}{10} \cdot 9 = 0.293.$$

4.2.3.3 Виконуємо наступну перевірку на стійкість

$$\sigma = \frac{P}{\varphi'_3 \cdot F} = \frac{200 \cdot 10^3}{0.293 \cdot 4.13 \cdot 10^{-3}} = 165 \text{ МПа.}$$

4.2.3.4 Підраховуємо відносну похибку

$$\delta = \frac{|160 - 165|}{160} \cdot 100\% = 3\%.$$

Відносна похибка задовільна, оскільки не перевищує $\pm 5\%$.

4.2.4 Розрахунок критичної сили та коефіцієнта запасу стійкості

Оскільки $\lambda > \lambda_{zp} = 100$, то критичну силу розраховуємо за формулою Ейлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot F \cdot i_{min}^2}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \cdot F,$$

де: $I_{min} = i_{min}^2 \cdot F$;

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}}.$$

Тоді: $P_{кр} = \frac{3.14^2 \cdot 2 \cdot 10^8}{159^2} \cdot 4.13 \cdot 10^{-3} = 322.14 \text{ кН.}$

Коефіцієнт запасу стійкості:

$$n_{ст} = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{322.14}{200} = 1.61.$$

[1, С. 502-504; 2, С. 38-43].

5 РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ІНЕРЦІЇ

5.1 Умова задачі

Вал і жорстко з'єднаний з ним ламаний стрижень такого ж поперечного перерізу обертаються з постійною швидкістю навколо осі AB .

Необхідно:

- побудувати епюру M_x від дії сил інерції, що виникають на вертикальній (CD) і горизонтальній (DE) ділянках ламаного стрижня;
- знайти допустиме число обертів вала за хвилину, якщо допустиме напруження матеріалу становить $[\sigma]=100$ МПа, а питома вага $\gamma=78$ кН/м³.

Розрахункові схеми і вихідні дані наведені на рисунку 5.1 і в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Вихідні дані

№ рядка	l , см	Діаметр валика d , мм	№ рядка	l , см	Діаметр валика d , мм
1	15	21	6	40	16
2	20	22	7	45	17
3	25	23	8	50	18
4	30	24	9	55	19
5	35	25	0	60	20

Примітка. Для спрощення обчислень рекомендується виконувати їх спочатку у загальному вигляді, позначаючи інтенсивність сил інерції через q . Рівнодійні сил інерції, опорні реакції, ординати епюри M_x виражати через ql і ql^2 .

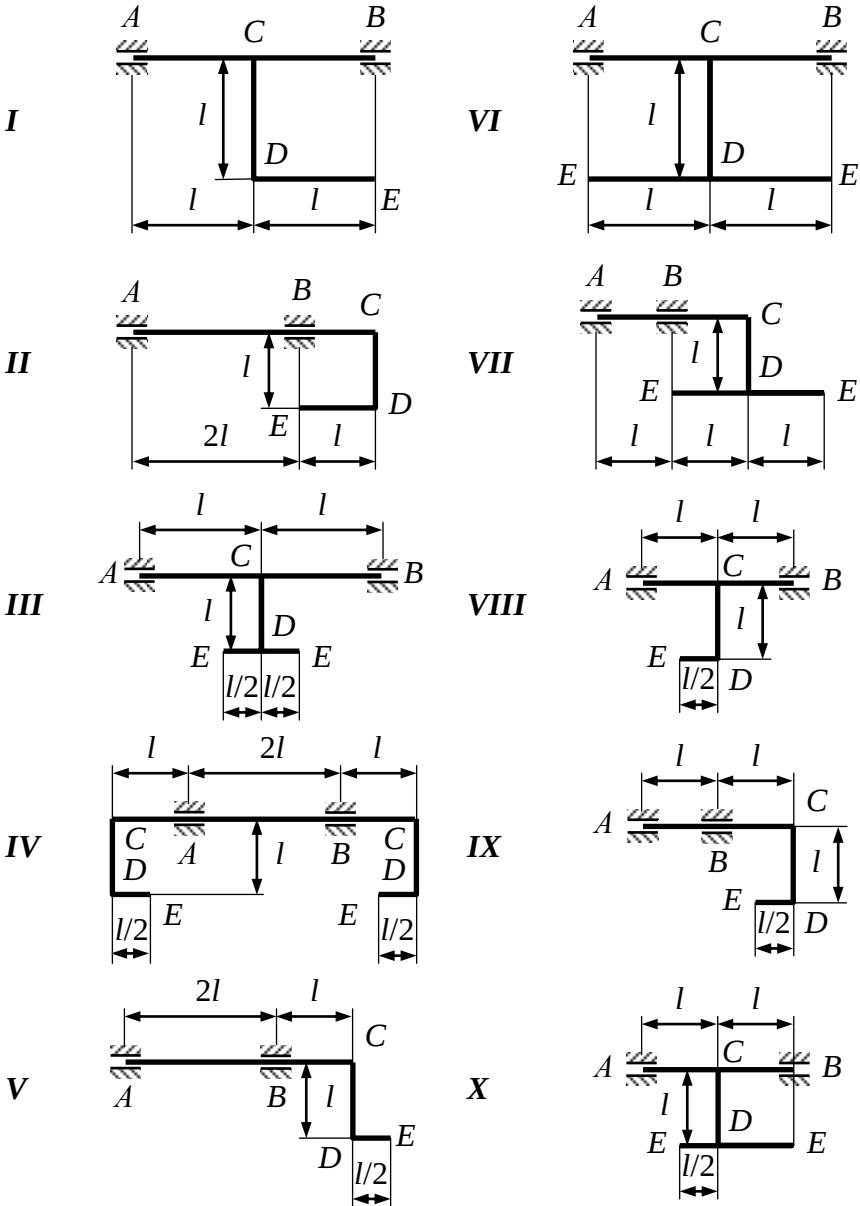
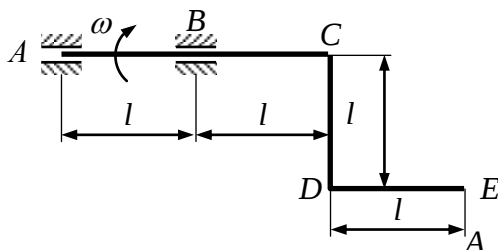


Рисунок 5.1 — Розрахункові схеми

5.2 Приклад розрахунку



Вихідні дані:

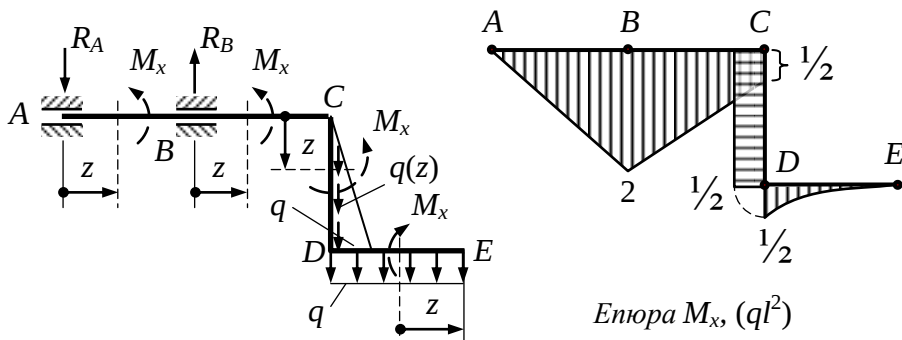
$$[\sigma] = 100 \text{ МПа};$$

$$\gamma = 78 \text{ кН/м}^3;$$

$$l = 40 \text{ см};$$

$$d = 20 \text{ мм}.$$

5.2.1 Встановлюємо закон зміни інтенсивності сил інерції і визначаємо реакції опор



Ділянка CD: $0 \leq z \leq l$.

$$q(z) = \frac{\gamma \cdot F}{g} \omega^2 \cdot z - \text{лінійний закон.}$$

$$\text{При } z=0: q(0)=0; \quad \text{при } z=l: q(l) = \frac{\gamma \cdot F}{g} \omega^2 \cdot l,$$

де ω - кутова швидкість обертання, рад/с.

Ділянка DE: Всі точки стрижня знаходяться на однаковій відстані l від вісі обертання, тому:

$$q_{DE} = q = \frac{\gamma \cdot F}{g} \omega^2 \cdot l.$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot l - \frac{1}{2}ql \cdot 2l - ql \cdot \frac{5}{2}l = 0; \quad R_B = \frac{7}{2}ql;$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A \cdot l - \frac{1}{2}ql \cdot l - ql \cdot \frac{3}{2}l = 0; \quad R_A = 2ql.$$

Перевірка: $\sum P_{\text{вер}} = 0; \quad R_B - R_A - ql - \frac{1}{2}ql = 0;$

$$\frac{7}{2}ql - 2ql - \frac{3}{2}ql = 0.$$

5.2.2 Визначасмо згинальні моменти на кожній ділянці

Ділянка DE: $0 \leq z \leq l.$

$$M_x + qz \cdot \frac{z}{2}; \quad M_x = -\frac{qz^2}{2} - \text{квадратична парабола.}$$

При $z=0$: $M_x=0$; при $z=l$: $M_x = -\frac{ql^2}{2}.$

Ділянка CD: $0 \leq z \leq l.$

$$M_x - R_B \cdot l + R_A \cdot 2l = 0; \quad M_x = \frac{7}{2}ql^2 - 4ql^2 = -\frac{1}{2}ql^2 - \text{пряма, що}$$

паралельна розглядуваній ділянці стрижня.

Ділянка AB: $0 \leq z \leq l.$

$$M_x = -R_A \cdot z. - \text{нахилена пряма.}$$

При $z=0$: $M_x=0$; при $z=l$: $M_x = -2ql^2.$

Ділянка BC: $0 \leq z \leq l.$

$$M_x = R_B \cdot z - R_A(l + z) - \text{нахилена пряма.}$$

При $z=0$: $M_x = -2ql^2$; при $z=l$: $M_x = -\frac{1}{2}ql^2.$

За розрахованими значеннями згинального моменту будуюмо епюру M_x , за якою знаходимо максимальний момент: $M_{x_{max}} = |2ql^2|$.

5.2.3 Умова міцності при згинанні має вид:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{x_{max}}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Враховуючи, що $q = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 l$, $W_x = \frac{\pi d^3}{32}$, $F = \frac{\pi d^2}{4}$,

запишемо: $M_{x_{max}} = \frac{2\gamma\pi d^2}{4g} \omega^2 l^3$.

Тоді отримуємо:

$$\sigma_{max} = \frac{2\gamma}{g} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \omega^2 l^3 \cdot \frac{32}{\pi d^3} = \frac{16\gamma\omega^2 l^3}{gd} \leq [\sigma].$$

Звідси визначаємо допустиму кутову швидкість обертання:

$$[\omega] = \sqrt{\frac{g \cdot d \cdot [\sigma]}{16 \cdot \gamma \cdot l^3}} = \sqrt{\frac{9.81 \cdot 0.02 \cdot 100}{16 \cdot 78 \cdot 10^{-3} \cdot 0.4^3}} = 15.67 \text{ с}^{-1}.$$

Тоді допустиме число обертів вала:

$$[n] = \frac{[\omega] \cdot 30}{\pi} = \frac{15.67 \cdot 30}{\pi} = 149.67 \text{ об/хв.}$$

[1, С. 605-610; 2, С. 44-48].

6 ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ В БАЛКАХ ПРИ УДАРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

6.1 Умова задачі

На двотаврову балку, яка закріплена на двох жорстких опорах, з висоти h падає вантаж вагою P .

Необхідно:

- а) визначити найбільше напруження в небезпечному перерізі балки;
- б) розв'язати аналогічну задачу за умови, що праву опору замінюємо пружиною, піддатливість якої дорівнює α ;
- в) порівняти отримані результати.

Розрахункові схеми і вихідні дані наведені на рисунку 6.1 і в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1 – Вихідні дані

№ рядка	№ двотавра	l , м	P , Н	h , см	$\alpha \cdot 10^3$, м/кН
1	20	2.1	1100	11	21
2	20а	2.2	1200	12	22
3	24	2.3	300	3	23
4	24а	2.4	400	4	24
5	27	2.5	500	5	25
6	27а	2.6	600	6	26
7	30	2.7	700	7	27
8	30а	2.8	800	8	28
9	33	2.9	900	9	29
0	36	3.0	1000	10	30

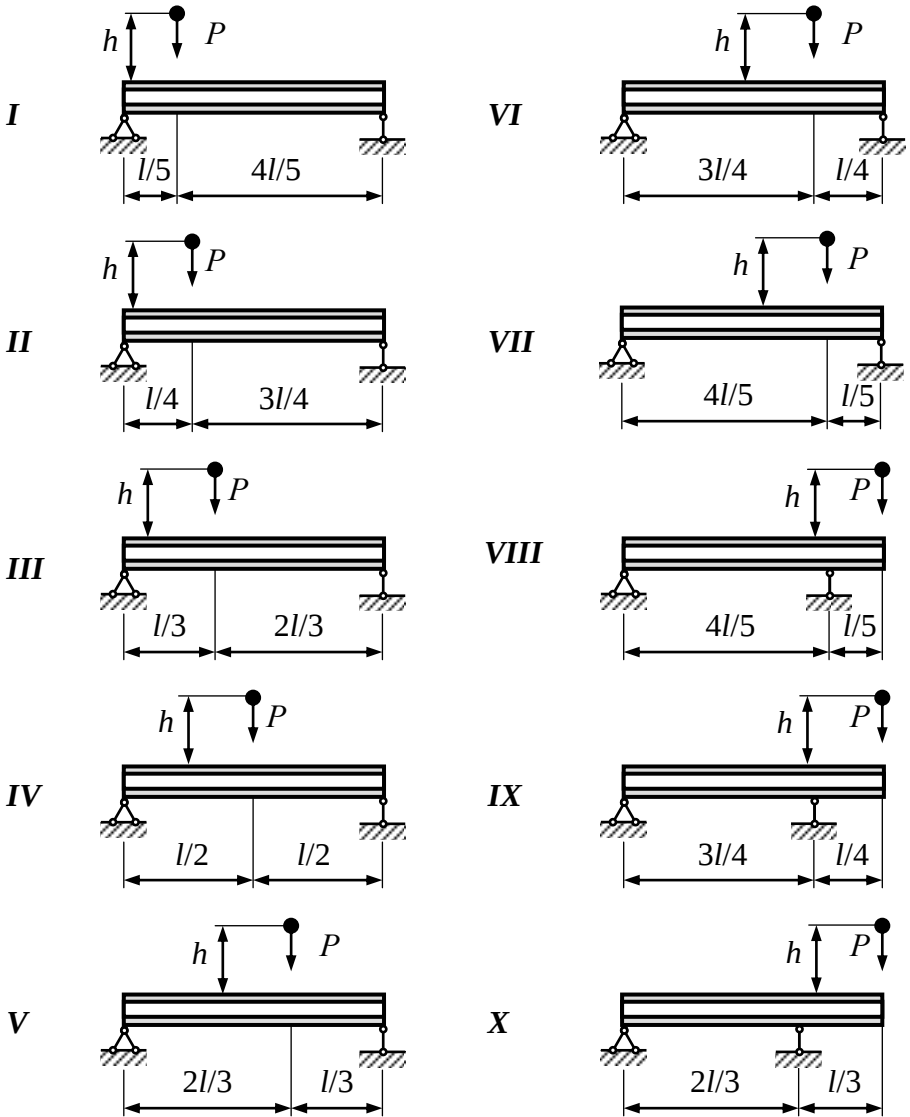
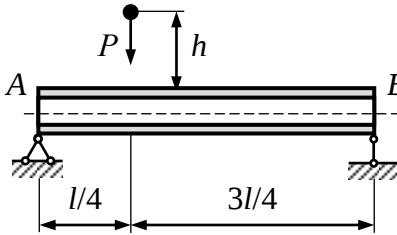


Рисунок 6.1 – Розрахункові схеми

6.2 Приклад розрахунку



Вихідні дані: двотавр №20;
 $h=11$ см; $l=2.2$ м;
 $P=800$ Н;
 $J_x=1810$ см⁴;
 $E=2 \cdot 10^{11}$ Па;
 $\alpha=22 \cdot 10^{-3}$ м/кН;
 $W_x=181$ см⁻³.

6.2.1 Визначаємо статичний прогин в точці удару (методом Верещагіна)

6.2.1.1 Визначаємо реакції опор

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot l - P \frac{l}{4} = 0;$$

$$R_B = \frac{P}{4} = 200 \text{ Н};$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A \cdot l - \frac{3}{4} Pl = 0;$$

$$R_A = \frac{3}{4} P = 600 \text{ Н}.$$

Перевірка: $\sum P_y = 0;$

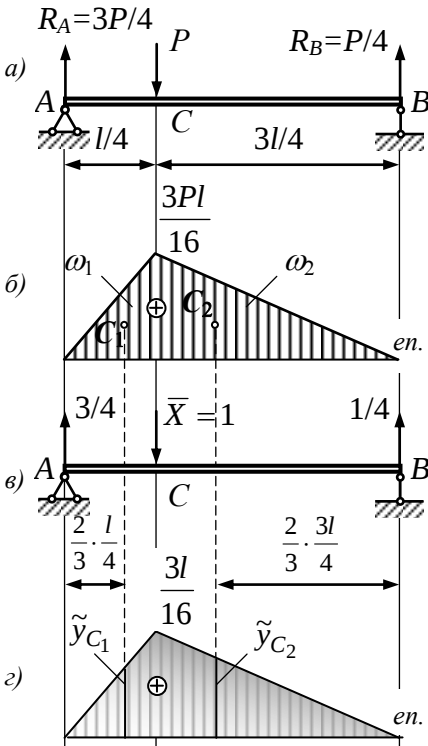
$$R_B - P + R_A = 0;$$

$$\frac{1}{4} P - P + \frac{3}{4} P = 0.$$

6.2.1.2 Будемо епюри згинальних моментів від дії навантаження та $\bar{M}_1$ одиничної сили, визначаємо площі ω_1 , ω_2 та ординати $\tilde{y}_{C_1}$, $\tilde{y}_{C_2}$:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} l \cdot \frac{3}{16} Pl = \frac{3}{128} Pl^2; \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} l \cdot \frac{3}{16} Pl = \frac{9}{128} Pl^2;$$

$$\tilde{y}_{C_1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{16} l = \frac{1}{8} l; \quad \tilde{y}_{C_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{16} l = \frac{1}{8} l.$$



6.2.1.3 *Визначаємо статичний прогин*

$$\Delta_{cm} = \frac{\omega_1 \cdot \tilde{y}_{C_1}}{EI_x} + \frac{\omega_2 \cdot \tilde{y}_{C_2}}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{3}{128} Pl^2 \cdot \frac{1}{8} l + \frac{9}{128} Pl^2 \cdot \frac{1}{8} l \right) =$$

$$= \frac{3}{256} \cdot \frac{Pl^3}{EI_x} = \frac{3}{256} \cdot \frac{800 \cdot 2.2^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1810 \cdot 10^{-8}} = 2.757 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

6.2.1.4 *Визначаємо коефіцієнт динамічності для випадку, коли ліва і права опори балки є жорсткими*

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0.11}{2.757 \cdot 10^{-5}}} = 90.323.$$

6.2.1.5 *Визначаємо максимальні статичні напруження*

$$\sigma_{cm} = \frac{M_x^{max}}{W_x} = \frac{3 \cdot P \cdot l}{16 \cdot W_x} = \frac{3 \cdot 800 \cdot 10^{-6} \cdot 2.2}{16 \cdot 181 \cdot 10^{-6}} = 1.82 \text{ МПа.}$$

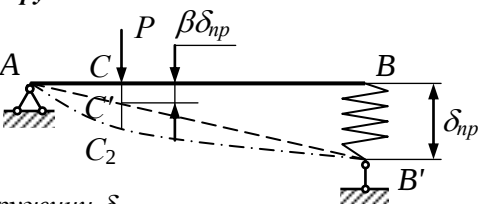
6.2.1.6 *Визначаємо максимальні динамічні напруження у розглядуваному випадку*

$$\sigma_d = k_d \cdot \sigma_{cm} = 90.323 \cdot 1.82 = 164.6 \text{ МПа.}$$

6.2.2 *Замінюємо праву опору пружиною*

$$\Delta'_{cm} = \Delta_{cm} + \beta \cdot \delta_{np},$$

де $|C'C_2| = \Delta_{cm}$.



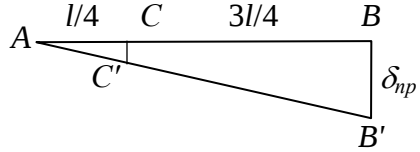
6.2.2.1 *Визначаємо осадку пружини δ_{np}*

$$\delta_{np} = BB' = R_B \cdot \alpha = \frac{P}{4} \cdot \alpha = \frac{800}{4} \cdot 22 \cdot 10^{-3} = 0.0044 \text{ м.}$$

6.2.2.2 *Визначаємо коефіцієнт β , який встановлює співвідношення між осадкою пружини та переміщенням точки прикладення сили P .*

З подібності трикутників ACC' та ABB' маємо:

$$\frac{CC'}{AC} = \frac{BB'}{AB} \Rightarrow \frac{\beta \cdot \delta_{np}}{\frac{1}{4}l} = \frac{\delta_{np}}{l};$$



$$\beta = \frac{1}{4} = 0.25;$$

$$\Delta'_{cm} = \Delta_{cm} + \beta \cdot \delta_{np} = 2.757 \cdot 10^{-5} + 0.25 \cdot 0.0044 = 1.128 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

6.2.2.3 *Визначаємо коефіцієнт динамічності для випадку, коли права опори балки є пружною (а ліва – жорсткою)*

$$k'_\delta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta'_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0.11}{1.128 \cdot 10^{-5}}} = 15.0.$$

6.2.2.4 *Визначаємо максимальні динамічні напруження у розглядуваному випадку*

$$\sigma_\delta = k'_\delta \cdot \sigma_{cm} = 15.0 \cdot 1.82 = 27.3 \text{ МПа.}$$

6.2.3 *Порівнюємо отримані результати*

$$K = \frac{\sigma_\delta}{\sigma'_\delta} = \frac{164.6}{27.3} = 6.02.$$

6.2.4 *Висновок*

Максимальні напруження в балці у випадку, коли її права опора є пружною, в шість разів менші ніж у випадку, коли права опора є жорсткою.

[1, С. 605-610; 2, С. 49-53].

ЛІТЕРАТУРА

1. Опір матеріалів. Підручник / Г.С. Писаренко, О.А. Квітка, Е.С. Уманський; за ред. Г.С. Писаренка. – К.: Вища школа, 2004. – 655 с.
2. Контрольні завдання і методичні вказівки до виконання модульних розрахунково-графічних робіт з курсу „Опір матеріалів” для студентів механічних спеціальностей денної форми навчання. IV семестр / Укл.: В.Г. Шевченко, А.О. Будник, В.Т. Кудін, С.Л. Рягін, О.В. Овчинников, – Запоріжжя: ЗНТУ, 2008. – 59 с.
3. Методичні вказівки для самостійної роботи і перевірки рівня засвоєння курсу „Опір матеріалів” з використанням програмного комплексу для студентів всіх спеціальностей денної форми навчання. / А.О. Будник, В.Г. Шевченко, С.Л. Рягін. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2004. – 15 с.