МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ І МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання модульних
розрахунково-графічних робіт
з курсу „Опір матеріалів”
для студентів механічних спеціальностей
денної форми навчання

IV семестр

2008

Контрольні завдання і методичні вказівки до виконання модульних розрахунково-графічних робіт з курсу „Опір матеріалів” для студентів механічних спеціальностей денної форми навчання. IV семестр / Укл.: В.Г. Шевченко, А.О. Будник, В.Т. Кудін, С.Л. Рягін, О.В. Овчинников, – Запоріжжя: ЗНТУ, 2008. − 59 с.

Укладачі: *В.Г. Шевченко*, доцент, к.т.н.
А.О. Будник, доцент, к.т.н.
В.Т. Кудін, доцент, к.т.н.
С.Л. Рягін, доцент, к.т.н.
О.В. Овчинников, доцент, к.т.н.

Комп’ютерна графіка
та верстка: *Г.А. Кот*

Рецензент: *Б.О. Трескунов*, доцент, к.т.н.

Відповідальний
за випуск: *В.Г. Шевченко*, доцент, к.т.н.

Видання перероблене та доповнене.

ЗАТВЕРДЖЕНО

на засіданні кафедри
механіки

Протокол № 3
від 27.12.2007 року

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Опір матеріалів − наука про інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів конструкцій різних споруд та механізмів [1].

Опір матеріалів, як загально технічна дисципліна, ґрунтується на теоретичних і дослідних даних. Тому при вивченні курсу „Опір матеріалів” студенти вивчають теорію (лекційні заняття) та виконують лабораторні роботи, які є обов’язковою частиною навчального процесу.

Для кращого засвоєння теорії та опанування методами розрахунку типових елементів конструкцій студенти використовують індивідуальні самостійні роботи і виконують розрахунково-графічні роботи (РГР).

Навчальним планом IV семестру студенту передбачено виконати чотири РГР. У кожній РГР, в залежності від спеціальності, студент виконує 1–3 типові задачі (ТЗ) за своїм особистим варіантом, що складається з двох останніх цифр номеру його залікової книжки або порядкового номеру у базі даних комп’ютерного класу. Передостання цифра варіанта означає номер рядка в таблиці даних, яка додається до кожної задачі, остання цифра − номер розрахункової схеми.

Наприклад, номер залікової книжки − 02 047 013.

У цьому випадку студент виконує ТЗ за 13-м варіантом: схема − №3, рядок в таблиці даних − 1. Якщо остання цифра нуль, то схема №10.

Оформлення розрахунково-графічних робіт необхідно виконувати відповідно існуючим вимогам на аркушах паперу формату А4.

Перевірку правильності виконання ТЗ можна здійснювати за допомогою програмного комплексу в комп’ютерному класі кафедри або безпосередньо у викладача під час консультацій.

Крім виконання РГР студенти проходять захист (тестування) основних тем IV семестру:

1 косе згинання;
2 позацентрове розтягання або стискання;
3 згинання з крученням;
4 стійкість та плоскі статично не визначувані рами.

Типові питання до кожної теми розглянуті у методичних вказівках [4].

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ ДО ТРЕТЬОГО МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ

Типові задачі до розрахунково-графічної роботи №1

1 РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ КОСОМУ ЗГИНАННІ

1.1 Умова задачі

Дерев’яна балка прямокутного поперечного перерізу навантажена вертикальною силою P у точці A та горизонтальною силою P в точці B. Обидві сили розташовані в головних площинах інерції.

Необхідно:

а) побудувати епюри згинальних моментів у вертикальній (M_x) та горизонтальній (M_y) площинах;

б) знайти небезпечний переріз;

в) підібрати розміри поперечного перерізу h та b при допустимому напруженні $[\sigma]$=10 МПа;

г) визначити положення нейтральної лінії в небезпечному перерізі;

д) для небезпечного перерізу побудувати епюру нормальних напружень у аксонометрії.

Примітка. Для спрощення обчислення рекомендується всі розрахунки до остаточного результату проводити в загальному вигляді.

Розрахункові схеми та вихідні дані наведені на рисунках 1.1 і в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Варіанти вихідних даних

№ рядка	P, кН	l, м	h/b	№ рядка	P, кН	l, м	h/b
1	14	1.1	2.0	***6***	9	1.6	1.5
2	13	1.2	1.9	***7***	8	1.7	1.4
3	12	1.3	1.8	***8***	7	1.8	1.3
4	11	1.4.	1.7	***9***	6	1.9	1.2
5	10	1.5	1.6	***0***	5	2.0	1.1

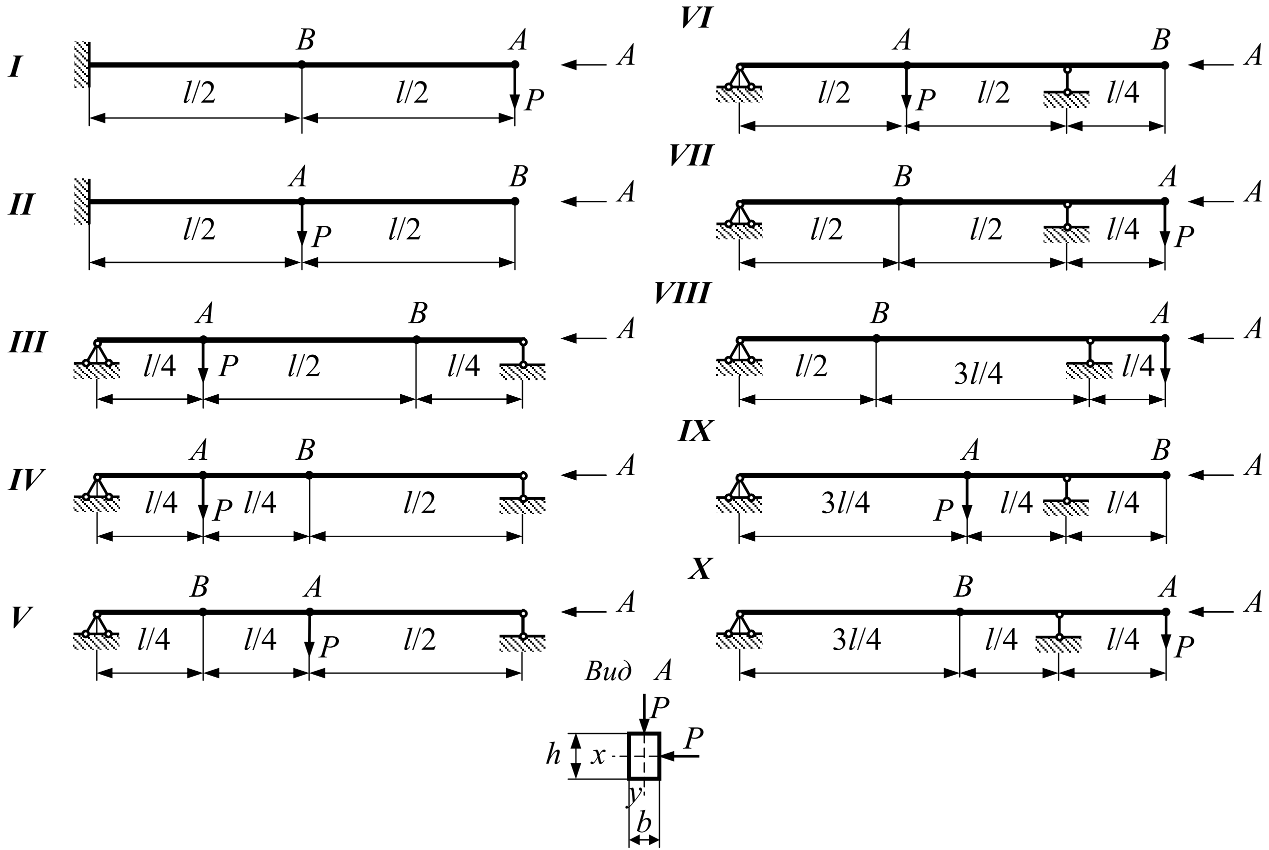


Рисунок 1.1 – Розрахункові схеми

1.2 Приклад розрахунку

Вихідні дані: P=10 Кн; l=1 м; h/b=1.2; $[\sigma]$=8 МПа.

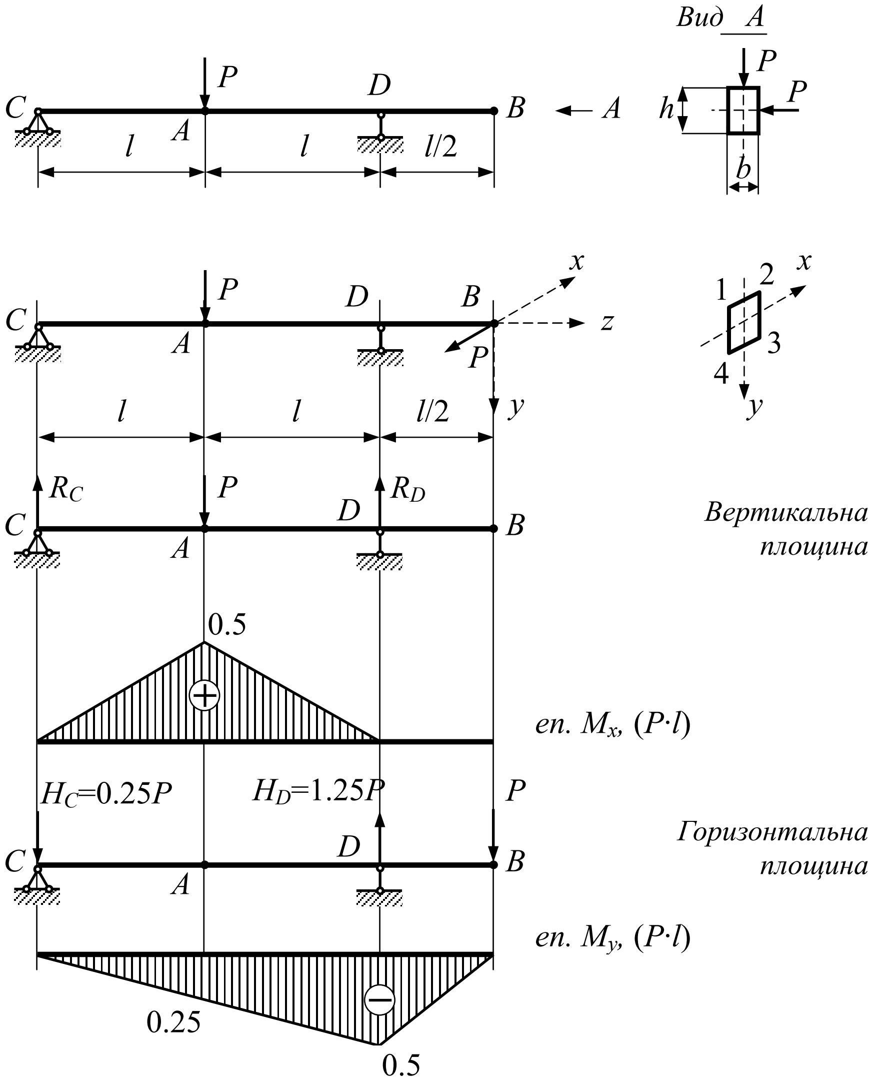


Рисунок 1.2 − Розрахункова схема, епюри M_x та M_y

1.2.1 *Побудова епюр згинальних моментів*

Визначаємо реакції опор від дії горизонтальних та вертикальних зусиль P, при цьому для зручності горизонтальну площину суміщаємо з вертикальною. Будуємо епюри згинальних моментів M_x та M_y (рис. 1.2).

1.2.2 *Визначення розмірів поперечного перерізу*

Умова міцності для косого згину має вигляд

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \le [\sigma] \quad \text{або} \quad \sigma_{max} = \frac{1}{W_x}\left(M_x + M_y\frac{W_x}{W_y}\right) \le [\sigma].$$

Для визначення небезпечного перерізу обчислюємо вираз, що знаходиться в круглих дужках.

Точка A: $(0.5 \cdot P \cdot l + 0.25\, P \cdot l \cdot 1.2) = 0.8 \cdot P \cdot l.$

Точка D: $(0 + 0.5 \cdot P \cdot l \cdot 1.2) = 0.6 \cdot P \cdot l,$

де $\frac{W_x}{W_y} = \frac{h}{b} = 1.2$.

Порівнюючи результати обчислень, знаходимо, що небезпечний переріз є в точці A. Тоді

$$\sigma_{max} = \frac{0.8 \cdot P \cdot l}{W_x} = [\sigma].$$

Так як $$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (1.2 \cdot b)^2}{6} = 0.24 b^3,$$

то $$b = \sqrt[3]{\frac{0.8 \cdot P \cdot l}{0.24 \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{0.8 \cdot 10^3 \cdot 1}{0.24 \cdot 8 \cdot 10^6}} = 0.161 \text{ м} = 16.1 \text{ см};$$

$$h = 16.1 \cdot 1.2 = 19.3 \text{ см}.$$

Визначаємо моменти опору

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{16.1 \cdot 19.3^2}{6} = 999.5 \text{ см}^3;$$

$$W_y = \frac{W_x}{1.2} = 832.9 \text{ см}^3.$$

1.2.3 *Побудова епюри нормальних напружень*

1.2.3.1 *Визначаємо напруження в кутових точках небезпечного перерізу*

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} = \pm \frac{5 \cdot 10^3}{999.5 \cdot 10^{-6}} \pm \frac{2.5 \cdot 10^3}{832.9 \cdot 10^{-6}} = \pm 5 \pm 3 \text{ МПа};$$

Враховуючи, що епюри моментів M_x та M_y будуємо збоку стиснутих волокон, то знак напружень в кутових точках визначається координатою x чи y в системі, яка зазначена на схемі рис. 1.2.

Наприклад, для точки 1, $y=-h/2$; $x=-b/2$; від моменту M_x стиснуті верхні волокна (т. 1 і 2), від моменту M_y стиснуті волокна лівої частини(т. 1 і 4)

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x = \frac{M_x}{I_x} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) + \frac{M_y}{I_y} \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) =$$

$$-\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} = -5 - 3 = -8 \quad \text{МПа}.$$

Аналогічно $\sigma_{(2)}$=-5+3=-2 МПа;

$\sigma_{(3)}$=+5+3=+8 МПа;

$\sigma_{(4)}$=+5-3=+2 МПа.

1.2.3.2 *Визначаємо положення нейтральної лінії*

$$tg\,\alpha = -\frac{M_y}{M_x}\cdot\frac{I_x}{I_y} = -\frac{0.25\cdot P\cdot l}{0.5\cdot P\cdot l}\cdot\left(\frac{h}{b}\right)^2 = -0.72\,,$$

де $\frac{I_x}{I_y} = \left(\frac{h}{b}\right)^2$;

$\alpha = -36°$.

1.2.3.3 *Будуємо епюру нормальних напружень в аксонометрії*

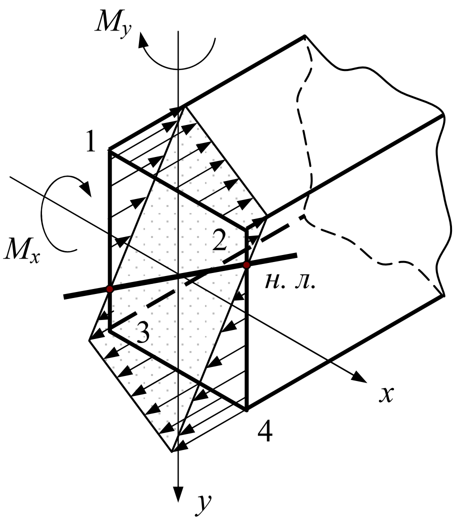


Рисунок 1.3 − Епюра нормальних напружень в аксонометрії

[1, С. 325−332; 2, С. 39−41; 3, С. 355−363].

2 РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ПОЗАЦЕНТРОВОМУ РОЗТЯГАННІ АБО СТИСКАННІ

2.1 Умова задачі

Чавунний короткий стержень заданого поперечного перерізу стискається поздовжньою силою P, прикладеною в точці A.

Необхідно:

а) визначити положення центру ваги перерізу;

б) визначити площу перерізу, осьові моменти інерції, квадрати радіусів інерції відносно головних центральних осей і положення нейтральної лінії;

в) в системі голових центральних осей інерції визначити координати x та y характерних точок, в яких розтягаючі і стискаючі напруження найбільші;

г) визначити найбільше стискаюче і розтягаюче напруження в долях від P/ab;

д) знайти допустиме навантаження $[P]$ при заданих напруженнях на стискання $[\sigma_c]$ та розтягання $[\sigma_p]$.

Розрахункові схеми та вихідні дані наведені на рисунках 2.1 і в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 − Вихідні дані

№ рядка	a, см	b, см	$[\sigma_c]$, МПа	$[\sigma_p]$, МПа
1	6	6	110	21
2	2	2	120	22
3	3	3	130	23
4	4	4	140	24
5	5	5	150	25
6	6	6	60	26
7	2	2	70	27
8	3	3	80	28
9	4	4	90	29
0	5	5	100	30

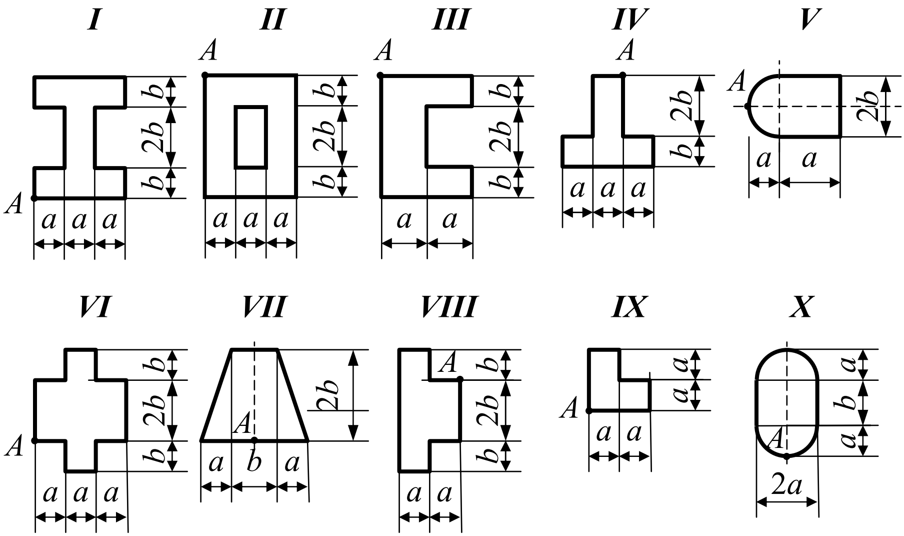
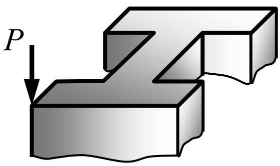


Рисунок 2.1 − Розрахункові схеми

2.2 Приклад розрахунку



Вихідні дані: a=1 м;
b=1 м;
σ_c=90 Мпа;
σ_p=30 Мпа.

Рисунок 2.2 − Схема навантаження стержня

2.2.1 *Визначення положення центру ваги перерізу*

Так як заданий переріз симетричний відносно двох осей, то центр ваги знаходиться на перетині осей симетрії x та y (рис. 2.3).

2.2.2 *Геометричні характеристики*

2.2.2.1 *Площа поперечного перерізу*

$$F=3a\cdot 4b-2a\cdot 2b=8ab=8 \text{ см}.$$

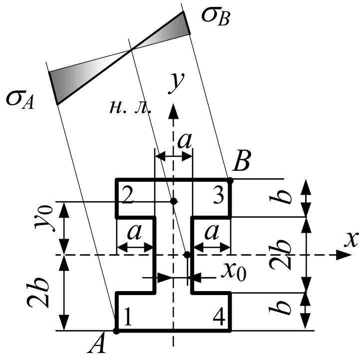


Рисунок 2.3 − Поперечний переріз стержня

2.2.2.2 *Моменти інерції відносно центральних осей* x *і* y

$$I_x=1/12[3a(4b)^3-2a(2b)^3]=14.667ab^3=14.667 \text{ см}^4;$$

$$I_y=1/12[2a(3b)^3-2ba^3]=4.667ba^3=4.667 \text{ см}^4.$$

2.2.2.3 *Квадрати радіусів інерції*

$$i_x^2=\frac{I_x}{F}=\frac{14.667ab^3}{8ab}=1.833b^3=1.833 \text{ см};$$

$$i_y^2=\frac{I_y}{F}=\frac{4.667ba^3}{8ab}=0.583a^3=0.833 \text{ см}.$$

2.2.2.4 *Положення нейтральної лінії*

$$x_0=-\frac{i_y^2}{x_p}=-\frac{0.583a^2}{-1.5a}=0.389 \text{ см},$$

де x_p=x_A=−1.5a=−1.5 см;

$$y_0=-\frac{i_x^2}{y_p}=-\frac{1.833b^2}{-2b}=0.916 \text{ см},$$

де $y_p=y_A=-2b=-2$ см.

Проводимо нейтральну лінію і визначаємо характерні точки, які найбільш віддалені від нейтральної лінії (рис. 2.3, точки 1 та 3).

2.2.3 *Координати найбільш віддалених точок*

$x_1=x_A=-1.5a=-1.5$ см;

$y_1=y_A=-2b=-2$ см;

$x_3=x_B=1{,}5a=1.5$ см;

$y_3=y_B=2b=2$ см.

2.2.4 *Визначення напружень в крайніх точках*

$$\sigma_i=-\frac{P}{F}\cdot\left(1-\frac{x_i}{x_0}-\frac{y_i}{y_0}\right)^{1};$$

$$\sigma_{(1)}=\frac{-0.88P}{ab}; \qquad \sigma_{(3)}=\frac{0.63P}{ab}.$$

2.2.5 *Визначення допустимого навантаження*

Так як $[\sigma_c]/[\sigma_p]=3$ більше $[\sigma_{(1)}]/[\sigma_{(3)}]=1.4$, то небезпечною є точка 3 і допустиме навантаження визначаємо за умовою

$$\sigma_{(3)}=\frac{0.63[P]}{ab}\le\left[\sigma_p\right],$$

звідки $[P]=4.67$ кН.

[1, С. 334−338; 2, С. 41−42, 52; 3, С. 364−376].

---

[1] Перед відношенням $\frac{P}{F}$ знак мінус тому, що сила P стискаюча.

3 ПОБУДОВА ЕПЮР ВНУТРІШНІХ СИЛОВИХ ФАКТОРІВ ТА РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПЛОСКО ПРОСТОРОВИХ СИСТЕМ

3.1 Умова задачі

На ламаний стержень круглого поперечного перерізу, який розташований в горизонтальній площині і має прямі кути в точках A і B, діє вертикальне навантаження.

Необхідно:

а) побудувати окремо (в аксонометрії) епюри згинаючих і крутних моментів;

б) визначити небезпечний переріз і знайти для нього розрахунковий момент за четвертою теорією міцності та діаметр стержня, якщо $[\sigma]$=160 МПа.

Розрахункові схеми та вихідні дані наведені на рисунку 3.1 і в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 − Вихідні дані

№ рядка	Коефіцієнт, α	Розмір l, м	Інтенсивність q, кН/м	№ рядка	Коефіцієнт, α	Розмір l, м	Інтенсивність q, кН/м
6	1.1	0.9	5	***6***	0.6	1.5	10
7	1.2	0.8	6	***7***	0.7	1.4	11
8	1.3	0.7	7	***8***	0.8	1.3	12
9	1.4	0.6	8	***9***	0.9	1.2	13
10	1.5	0.5	9	***0***	1	1.1	14

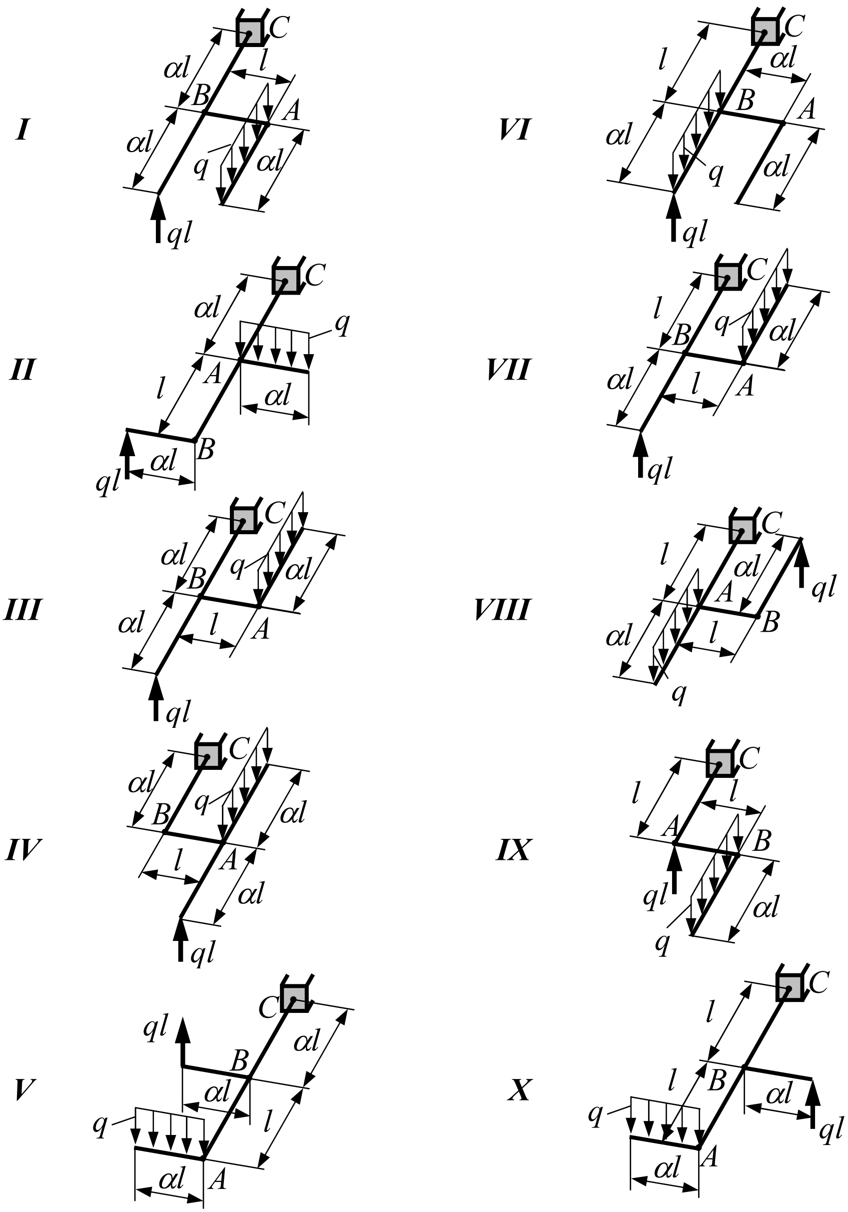


Рисунок 3.1 − Розрахункові схеми

3.2 Приклад розрахунку

Вихідні дані: l=1 м; q=10 кН/м; α=1.2.

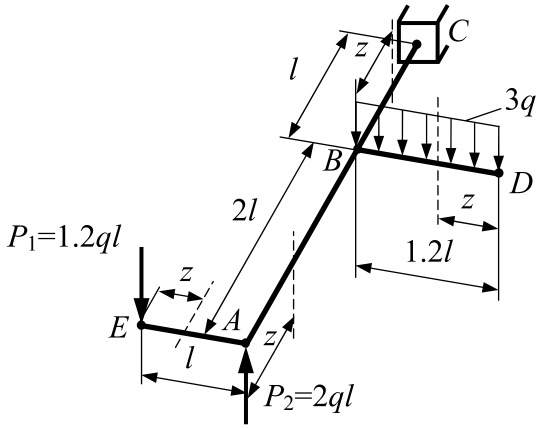


Рисунок 3.2 − Розрахункова схема

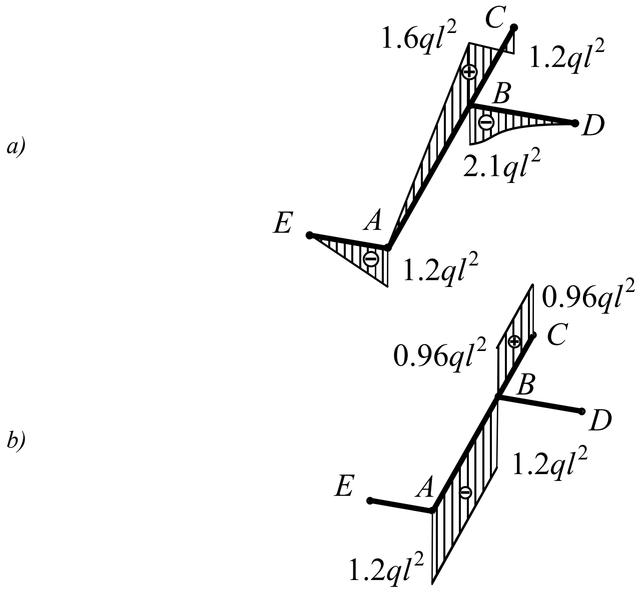
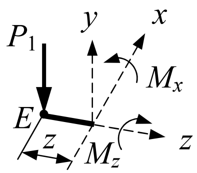


Рисунок 3.3 − Епюри моментів M_x і M_z

3.2.1 ***Відповідно даним креслимо розрахункову схему в аксонометрії*** (рис. 3.2)

Використовуючи метод перерізів, будуємо епюри згинальних (M_x) та крутних (M_z або $M_{кр}$) моментів на кожній силовій ділянці.

Ділянка EA: $0 \le z \le l.$



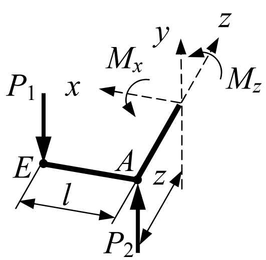
$M_x = -P_1 \cdot z = -1.2qlz$ ➔ *пряма похила лінія*

$M_z = 0;$

$z=0;\quad M_x=0;$ ➔ т. E;

$z=l;\quad M_x=-1.2ql^2;$ ➔ т. A (рис. 3.2, *а*).

Ділянка AB: $0 \le z \le 2l.$



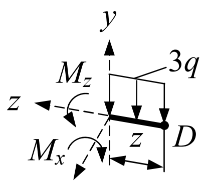
$M_x = P_2 \cdot z = -P_1 \cdot z = 0.8qlz$ ➔ *пряма похила лінія*

$M_z = -P_1 \cdot l = -1.2ql^2 = const;$ ➔ *пряма* ‖ *осі Z* (рис. 3.2, *б*);

$z=0;\quad M_x=0;$ ➔ т. A;

$z=2l;\quad M_x=1.6ql^2;$ ➔ т. B (рис. 3.2, *а*).

Ділянка DB: $0 \le z \le 1.2l.$



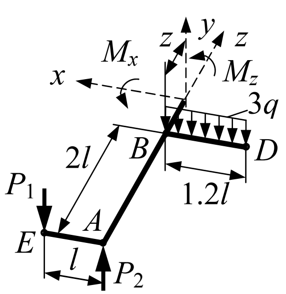
$M_x = -3qz \cdot z/2 = -3qz^2/2$ ➔ *квадратична парабола*;

$M_z = 0;$

$z=0;\quad M_x=0;$ ➔ т. D;

$z=1.2l;\quad M_x=-2.16ql^2;$ ➔ т. B (рис. 3.2, *а*).

Ділянка BC: $0 \le z \le l.$



$M_x = -P_1(2l+z) + P_2(2l+z) - 3.6qlz;$ ➔ *пряма похила лінія*

$M_z = P_1 \cdot l + 3q \cdot 1.2l \cdot 0.6l =$
$= 0.96ql^2 = const;$ ➔ *пряма* ‖ *осі z* (рис. 3.2, *б*);

$z=0;\quad M_x=1.6ql^2;$ ➔ т. B;

$z=l;\quad M_x=1.2ql^2;$ ➔ т. C (рис. 3.2, *а*).

3.2.2 *Визначення небезпечного перерізу*

Аналіз епюр M_x і M_z показує, що найбільш небезпечним є переріз в точці B збоку ділянки AB.

$$M_x=1.6ql^2; \quad M_x=|1.2ql^2|;$$

3.2.3 *Розрахунок на міцність*

Розрахунковий момент за четвертою теорією міцності визначається формулою

$$M_p^{IV} = \sqrt{M_x^2 + 0.75M_z^2} = 1.908 \cdot ql^2 = 1.908 \cdot 10 \cdot 1 = 1908 \text{ кН·м.}$$

Із умови міцності визначаємо діаметр стержня

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_p^{IV}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 19.08 \cdot 10^{-3}}{3.1416 \cdot 160}} = 0.1067 \text{ м.}$$

Приймаємо d=105 мм.

[1, С. 420−423; 2, С. 42−43; 3, С. 385−388].

Типові задачі до розрахунково-графічної роботи №2

4 РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ЗГИНАННІ З КРУЧЕННЯМ

4.1 Умова задачі

Шків, діаметром D_1, і з кутом нахилу віток пасу до горизонту α_1, робить n обертів за хвилину і передає потужність N кВт.

Два інших шківи мають однаковий діаметр D_2 і однакові кути нахилу віток пасу до горизонту α_2, кожен з них передає потужність $N/2$.

Необхідно:

а) визначити і побудувати епюру крутних моментів $M_{кр}$;
б) визначити колові зусилля та радіальний тиск на вал;
в) накреслити розрахункову схему і показати зусилля, що діють на вал;
г) побудувати епюри M_x і M_y у вертикальній та горизонтальній площинах;
д) побудувати епюру сумарних моментів $M_{зг}$;
е) знайти, з аналізу епюр $M_{кр}$ і $M_{зг}$, максимальний розрахунковий момент за третьою теорією міцності;
ж) визначити діаметр валу при $[\sigma]$=70 МПа та округлити його до стандартної величини.

Розрахункові схеми та вихідні дані наведені на рисунку 4.1 і в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 − Вихідні дані

№ рядка	N, кВт	n, об/хв	a, м	b, м	c, м	D_1, м	D_2, м	α_1°	α_2°
1	10	100	1.1	1.5	1.8	1.1	1.0	10	0
2	20	200	1.2	1.6	1.9	1.2	1.9	20	90
3	30	300	1.3	1.7	1.0	1.3	1.8	30	80
4	40	400	1.4	1.8	1.1	1.4	1.7	40	70
5	50	500	1.5	1.9	1.2	1.5	1.6	50	60
6	60	600	1.6	1.1	1.3	1.6	1.5	60	50
7	70	700	1.7	1.2	1.4	1.7	1.4	70	40
8	80	800	1.8	1.3	1.5	1.8	1.3	80	30
9	90	900	1.9	1.4	1.6	1.9	1.2	90	20
0	100	1000	1.0	1.0	1.7	1.0	1.1	0	10

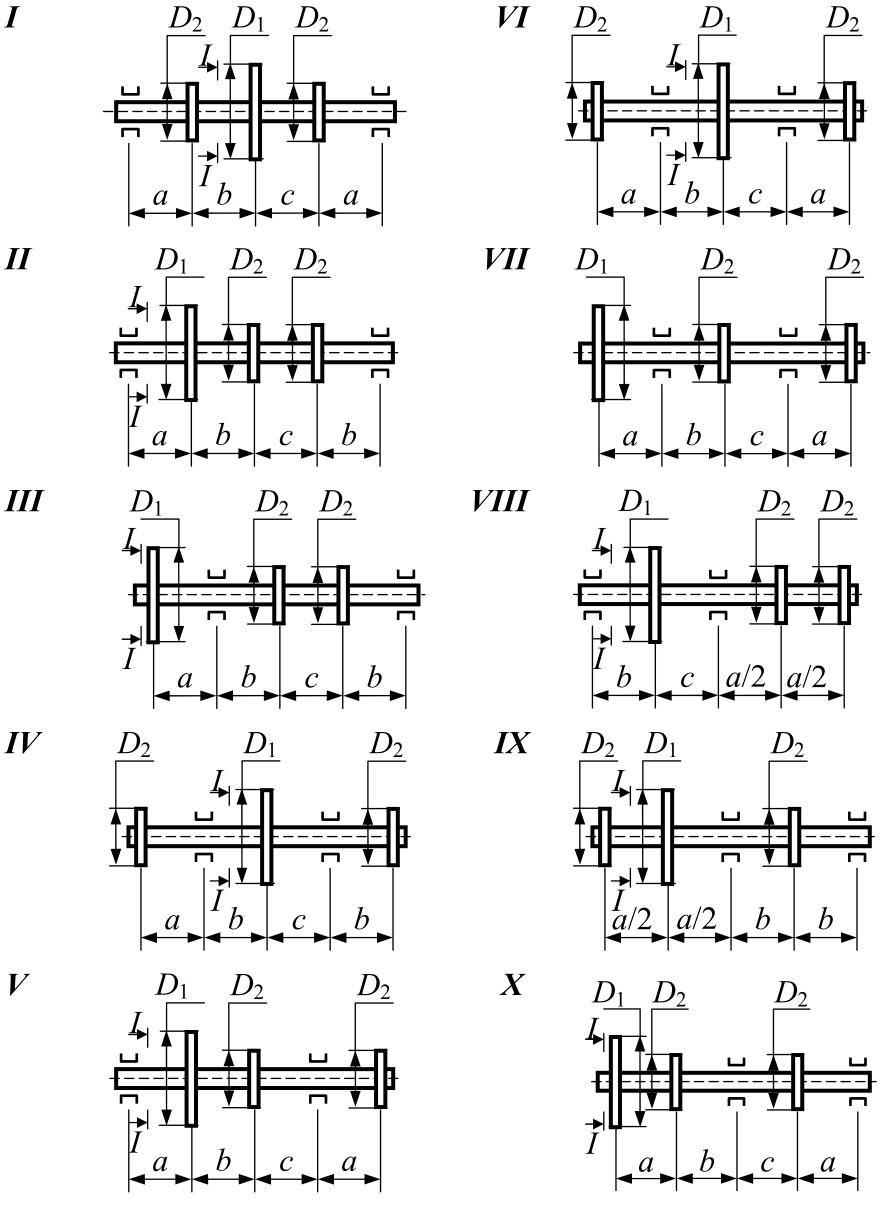


Рисунок 4.1 − Розрахункові схеми

4.2 Приклад розрахунку

Вихідні дані: N=100 кВт; n=1000 об/хв;
a=b=1 м; D_1=1 м; D_2=0.5 м;
α_1=60°; α_2=30°.

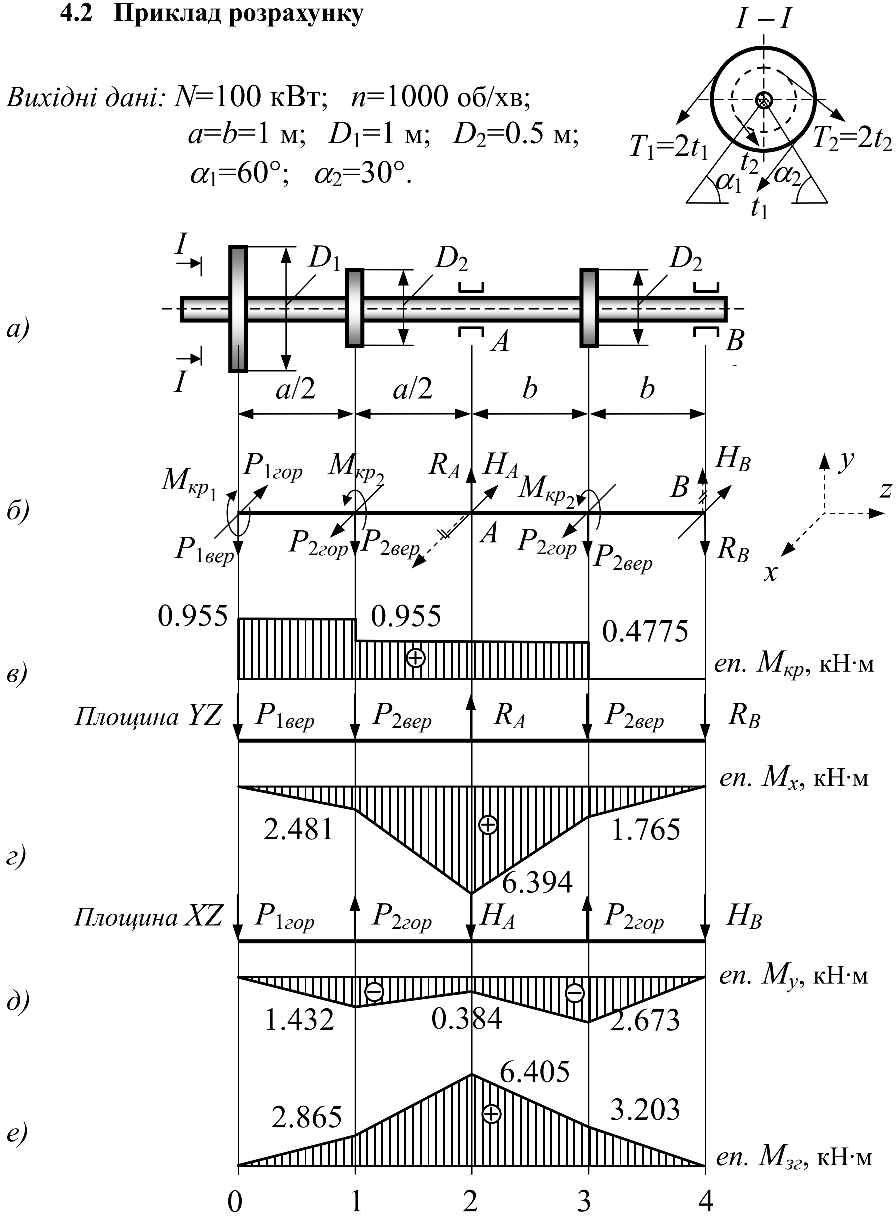


Рисунок 4.2− Розрахункова схема, епюри M_x, M_y, $M_{кр}$, $M_{зг}$

4.2.1 Визначити $M_{кр}$ на шківах D_1 і D_2

$$M_{кр_1}=9.55N/n=0.955 \text{ кНм};$$

$$M_{кр_2}=0.5M_{кр_1}=0.4775 \text{ кНм}.$$

4.2.2 Визначити колові зусилля t_1, t_2 і радіальний тиск на вал P_1 та P_2

$$t_1=\frac{2M_{кр_1}}{D_1}=\frac{2\cdot 0.955}{1}=1.91 \text{ кН};$$

$$t_2=\frac{2M_{кр_2}}{D_2}=\frac{2\cdot 0.4775}{0.5}=1.91 \text{ кН};$$

$$P_1=3t_1=3\cdot 1.91=5.73 \text{ кН};\quad P_2=3t_2=3\cdot 1.91=5.73 \text{ кН}.$$

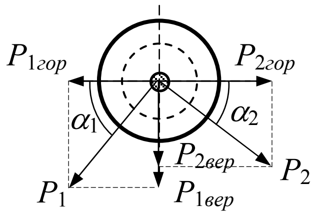
4.2.2.1 *Визначити зусилля, які діють в горизонтальній і вертикальній площинах*

$$P_{1гор}=P_1\cdot cos\ \alpha_1=5.73\cdot cos\ 60°=2.865 \text{ кН};$$

$$P_{2гор}=P_2\cdot cos\ \alpha_2=5.73\cdot cos\ 30°=4.962 \text{ кН};$$

$$P_{1вер}=P_1\cdot sin\ \alpha_1=5.73\cdot sin\ 60°=4.962 \text{ кН};$$

$$P_{2вер}=P_2\cdot sin\ \alpha_2=5.73\cdot sin\ 30°=2.865 \text{ кН}.$$



4.2.3 Показати на розрахунковій схемі усі зусилля, які діють на вал, і визначити опорні реакції (рис. 4.2, *б*)

4.2.3.1 *Вертикальна площина*

$$\sum M_B=0;\quad R_A=\frac{P_{1вер}(2b+a)+P_{2вер}\left(3b+\dfrac{a}{2}\right)}{2b}=$$

$$=\frac{4.962\cdot 3+2.865\cdot 3.5}{2}=12.457 \quad \text{кН};$$

$$\sum P_Y = 0; \quad R_B = P_{1вер} + 2P_{2вер} - R_A = 4.962 + 2 \cdot 2.865 - 12.457 =$$

$$= -1.765 \quad \text{кН} \quad -$$ *направлена вниз, напрям змінюємо на протилежний.*

4.2.3.2 *Горизонтальна площина*, яку для зручності суміщаємо з вертикальною площиною

$$\sum M_B = 0; \quad H_A = \frac{P_{1гор}(2b + a) - P_{2гор}\left(3b + \dfrac{a}{2}\right)}{2b} =$$

$$= \frac{2.865 \cdot 3 - 4.962 \cdot 3.5}{2} =$$

$$= -4.386 \quad \text{кН} -$$ *направлена ліворуч*;

$$\sum P_X = 0; \quad H_B = H_A + P_{1гор} - 2P_{2гор} = 4.386 + 2.865 - 2 \cdot 4.962 =$$

$$= -2.673 \quad кН \quad -$$ *направлена ліворуч, тобто не співпадає з попереднім напрямом.*

4.2.4 ***Побудувати епюру*** $M_{кр}$ (рис. 4.2, *в*)

4.2.5 ***Визначити згинальні моменти в вертикальній і горизонтальній площинах для характерних перерізів і побудувати епюри*** M_x ***і*** M_y (рис. 4.2, *д*; 4.2, *г*)

4.2.6 ***Побудувати сумарну епюру згинальних моментів, попередньо визначивши їх величину в характерних точках*** **1, 2, 3** (рис. 4.2, *е*)

$$M_{зг(1)} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2} = \sqrt{2.481^2 + 1.432^2} = 2.865 \ \text{кН·м};$$

$$M_{зг(2)} = \sqrt{6.394^2 + 0.384^2} = 6.405 \ \text{кН·м};$$

$$M_{зг(3)} = \sqrt{1.765^2 + 2.673^2} = 3.203 \text{ кН·м.}$$

Примітка. Необхідно пам’ятати, що вектор моменту $M_{зг}$ в різних перерізах може мати різні напрями, внаслідок чого епюра $M_{зг}$ може бути криволінійною (рис. 4.2, *е*; ділянки 1−2, 2−3).

4.2.7 *Визначити небезпечний переріз і величину M_p^{III} у цьому перерізі*

Для нашого прикладу це переріз в т. 2 (опора *A*), де

$$M_{кр}=0.4775 \text{ кН·м}; \quad M_{зг}=6.405 \text{ кН·м.}$$

Тому

$$M_p^{III} = \sqrt{M_{зг}^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{6.407^2 + 0.4775^2} = 6.423 \text{ кН·м.}$$

4.2.8 *Визначити діаметр вала*

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_p^{III}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6.423 \cdot 10^{-3}}{3.14 \cdot 70}} = 9.78 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Округлюючи розрахунковий діаметр до стандартних величин, передбачених ГОСТ 6636-69, одержимо − d=100 мм.

[1, С. 338−342; 2, С. 42−45; 3, С. 377−384].

5 ПОБУДОВА ЕПЮР Q_y, M_x І ЛІНІЇ ПРОГИНІВ $W_{(Z)}$ ДЛЯ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ НЕРОЗРІЗНИХ БАЛОК

5.1 Умова задачі

Статично невизначувана балка навантажена розподіленим та зосередженим зусиллям.

Необхідно:

а) розкрити статичну невизначуванність балки і визначити реактивні зусилля (в долях ql);

б) побудувати епюри перерізуючих сил Q_y та згинаючих моментів M_x;

в) побудувати епюри прогинів W та обчислити три координати у прольоті і дві − на консолі.

Розрахункові схеми та вихідні дані наведені на рисунку 5.1 і в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 − Вихідні дані

№ рядка	Коефіцієнти		№ рядка	Коефіцієнти	
	α	β		α	β
1	0.1	1.0	***6***	0.6	1.5
2	0.2	0.9	***7***	0.7	0.4
3	0.3	0.8	***8***	0.8	0.3
4	0.4	0.7	***9***	0.9	0.2
5	0.5	0.6	***0***	1.0	0.1

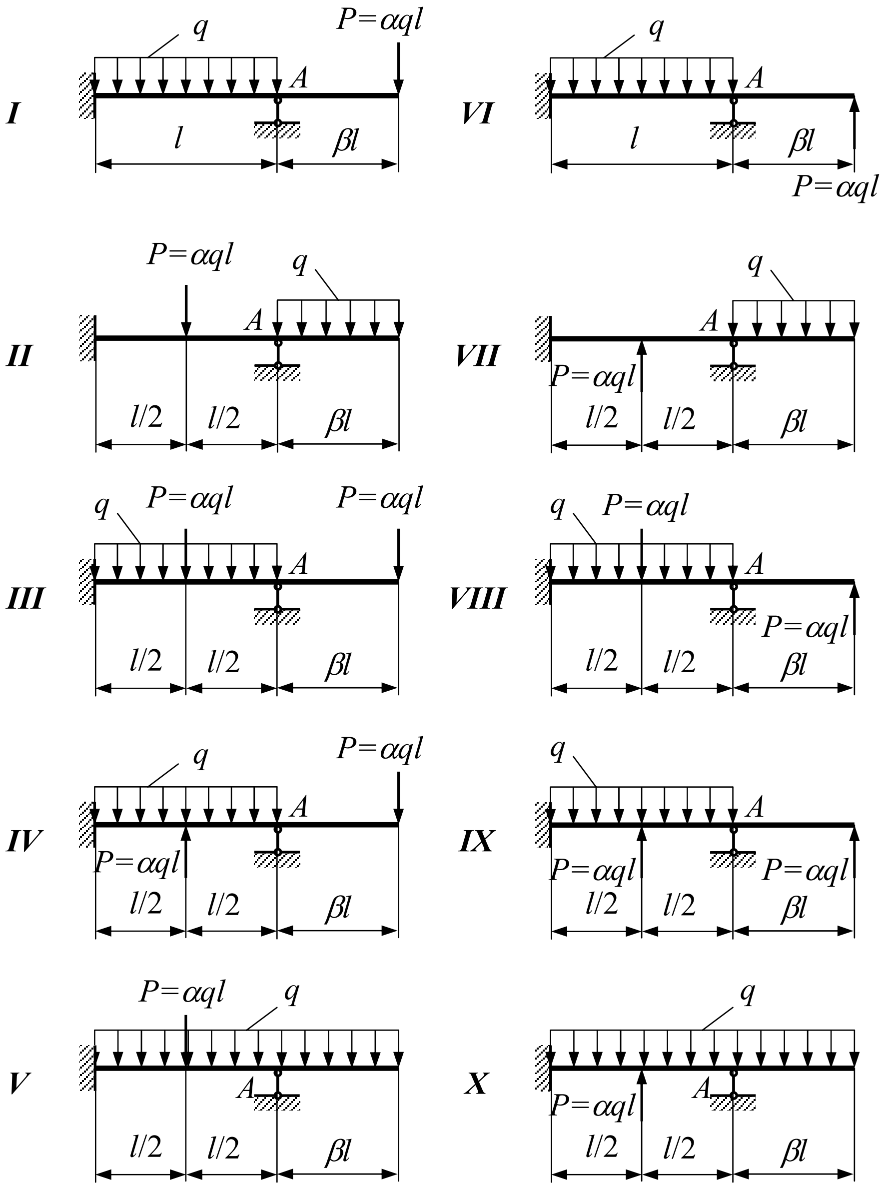


Рисунок 5.1 − Розрахункові схеми

5.2 Приклад розрахунку

Вихідні дані: α=1; β=1.

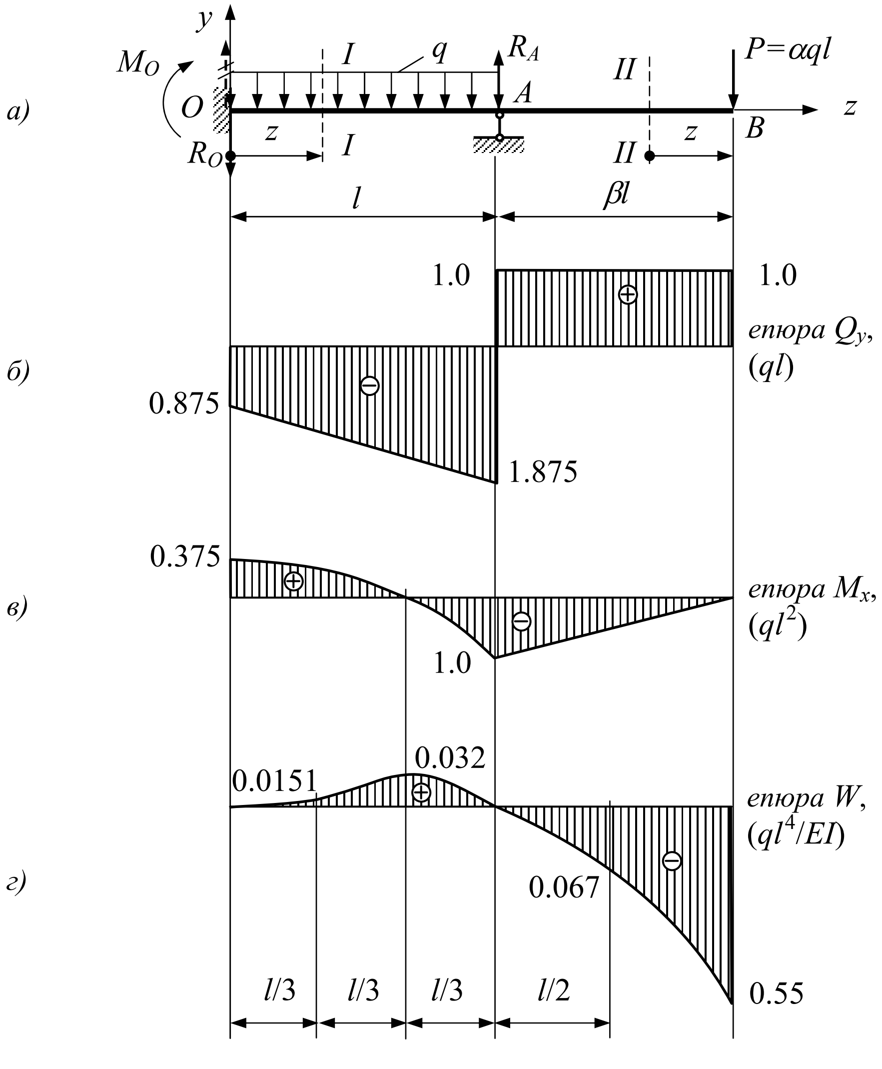


Рисунок 5.2− Розрахункова схема, епюри M_x, Q_y та $W_{(г)}$

Статичну невизначуванність розв'язуємо за допомогою рівнянь статики та метода початкових параметрів.

5.2.1 *Визначаємо момент та реакцію на лівій опорі M_O і R_O*

Для цього складаємо два рівняння.

5.2.1.1 *Рівняння статики* у вигляді суми моментів всіх зовнішніх зусиль відносно правої опори *A* (рис. 5.2, *а*)

$$\sum M_A = 0; \quad M_O + R_O \cdot l - \frac{ql^2}{2} + ql^2 = 0\,, \qquad (5.1)$$

де $P \cdot \beta \cdot l = ql^2$.

5.2.1.2 *Рівняння метода початкових параметрів* для першої ділянки (рис. 5.2, *а*)

$$EI_x W_z = EI_x W_O + EI_x \varphi_O \cdot z + \frac{M_O \cdot z^2}{2} + \frac{R_O \cdot z^3}{6} - \frac{q \cdot z^4}{24}\,.$$

При z=0 $W_{(O)}$=0; φ_O=0 (*закріплення*).

При z=l $W_{(l)}$=0 (*опора*). Тоді

$$\frac{M_O \cdot l^2}{2} + \frac{R_O \cdot l^3}{6} - \frac{ql^4}{24} = 0\,. \qquad (5.2)$$

Із рівняння 5.2 визначаємо

$$R_O = -\frac{3M_O}{l} + \frac{ql}{4}\,.$$

Із рівняння 5.1 визначаємо

$$M_O + \left(\frac{ql}{4} - \frac{3M_O}{l}\right) \cdot l - \frac{ql^2}{2} + ql^2 = 0\,; \; M_O = \frac{3ql^2}{8} = 0.375ql^2\,.$$

Тоді $R_O = -0.875 \cdot ql$ − *напрям* R_O *змінюємо на протилежний.*

5.2.2 Визначаємо реакції R_A

$$\sum M_O = 0; \quad R_A \cdot l - M_O - \frac{ql^2}{2} - 2ql^2 = 0; \quad R_A = 2.875ql.$$

5.2.3 Визначаємо Q_y і M_x

Ділянка OA, *переріз I–I*: $0 \le z \le l$.

$$Q_y = -R_O - qz; \quad M_x = M_O - R_O \cdot z - \frac{qz^2}{2};$$

$$z=0; \quad Q_y = -R_O = 0.875ql; \quad M_x = M_O = 0.375ql^2;$$

$$z=l; \quad \begin{cases} Q_y = -0.875ql - ql = -1.875ql; \\ M_x = -ql^2. \end{cases}$$

Ділянка AB, *переріз II–II*: $0 \le z \le l$.

$$Q_y = q \cdot l; \quad M_x = -q \cdot l\, z;$$

$$z=0; \quad Q_y = q \cdot l; \quad M_x = 0;$$

$$z=l; \quad Q_y = q \cdot l; \quad M_x = -q \cdot l^2.$$

За відомими даними будуємо епюри Q_y та M_x (рис. 5.2; *б*, *в*).

5.2.4 Визначення прогинів балки

Початок координат системи yz вибираємо в закріпленні (точка O). Тоді початкові параметри W_O і φ_O дорівнюють нулю ($W_O=0$; $\varphi_O=0$) і рівняння прогинів набирає вид

Ділянка OA: $0 \le z \le l$. $$EI_x W_z = \frac{M_O \cdot z^2}{2} - \frac{R_O \cdot z^3}{6} - \frac{q \cdot z^4}{24}$$

1. $z=0$; $W_{(O)}=0$.

2. $z = \frac{1}{3}l$; $W_{\left(\frac{1}{3}l\right)} = 0.0151\dfrac{ql^4}{EI_x}$.

3. $z = \frac{2l}{3}$; $W_{\left(\frac{2l}{3}\right)} = 0.032\dfrac{ql^4}{EI_x}$.

4. $z=l$; $W_{(l)}=0$.

Ділянка AB: $l \le z \le 2l$.

$$EI_x W_z = \frac{M_O \cdot z^2}{2} - \frac{R_O \cdot z^3}{6} - \frac{q \cdot z^4}{24} + \frac{R_A (z-l)^3}{6} - \frac{q(z-l)^4}{24};$$

1. $z = 1.5l;\quad W_{(1.5l)} = -0.067\dfrac{ql^4}{EI_x}$. 2. $z = 2l;\quad W_{(2l)} = -0.55\dfrac{ql^4}{EI_x}$.

Епюра прогинів показана на рис. 5.2; *г.*

[1, С. 404−442; 2, С. 38−39].

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ ДО ЧЕТВЕРТОГО МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ

Типові задачі до розрахунково-графічної роботи №3

6 ПОБУДОВА ЕПЮР N, Q_y, M_x І НА МІЦНІСТЬ ПЛОСКИХ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ РАМ

6.1 Умова задачі

Для заданої плоскої статично невизначуваної рами, вертикальні елементи якої мають моменти інерції $I_2=I$, а горизонтальні елементи − $I_1=kI$, необхідно:

а) вибрати основну систему;

б) накреслити еквівалентну систему і записати канонічні рівняння методу сил;

в) способом Верещагіна або методом Мора визначити коефіцієнти рівняння δ_{11} та Δ_{1p} і знайти величину невідомої реакції x;

г) побудувати епюри внутрішніх силових факторів і визначити розміри квадратного поперечного перерізу, $[\sigma]$=160 МПа.

Розрахункові схеми і вихідні дані наведені на рисунку 6.2 і в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1 − Вихідні дані

№ рядка	l, м	h, м	q, кН/м	k	P, Н	M, Нм
1	11	2	15	1.1	1100	1000
2	12	3	20	1.2	1200	2000
3	3	4	30	1.3	1300	1500
4	4	5	4	1.4	1400	1200
5	5	6	5	1.5	1500	1000
6	6	2	6	1.6	600	800
7	7	3	7	1.7	700	600
8	8	4	8	1.8	800	1000
9	9	5	9	1.9	900	1500
0	10	6	10	2.0	1000	2000

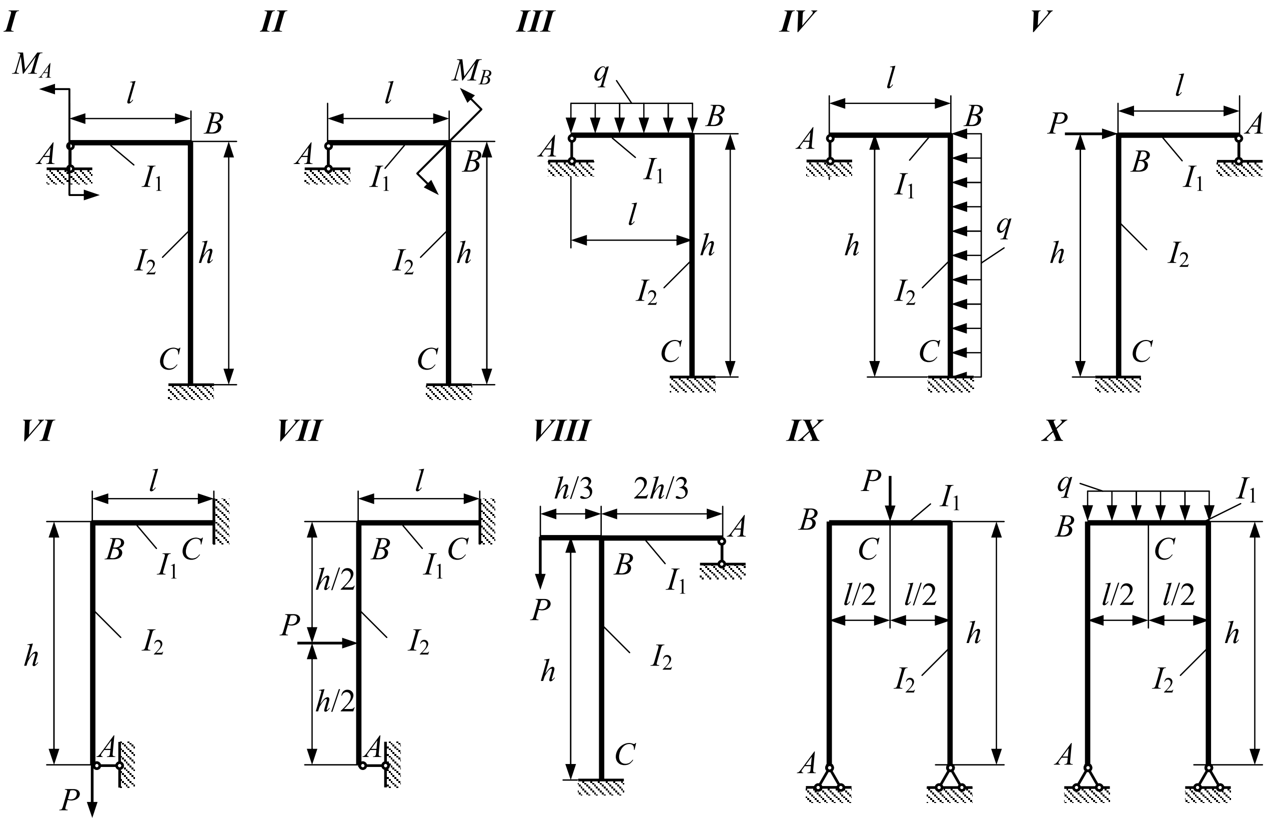
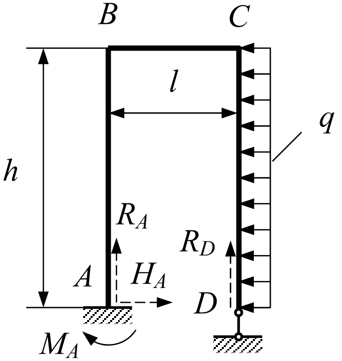


Рисунок 6.1 – Розрахункові схеми

6.2 Приклад розрахунку



Вихідні дані: q=15 кН/м;
h=2 м; l=11 м;
I_1=I_2=I (k=1).

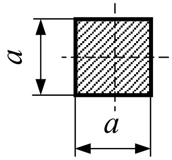
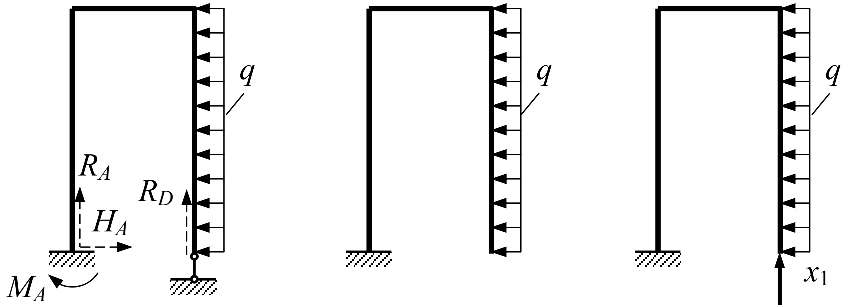


Рисунок 6.2 − Розрахункова схема

З аналізу схеми видно, що невідомих реакцій 4, а рівнянь рівноваги для задано плоскої системи – 3. тому задана рама один раз статично невизначувана. Задачу розв’язуємо методом сил.

6.2.1 *Будуємо основну та еквівалентну системи*

Задана система *Основна система* *Еквівалентна система*



Складаємо канонічне рівняння методу сил

$$\delta_{11}x_1 + \Delta_{1p} = 0,$$

звідки

$$x_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}.$$

6.2.2 *Визначаємо коефіцієнти рівняння δ_{11} та Δ_{1p} способом Верещагіна*

Для цього будуємо епюри згинальних моментів від заданого навантаження та від одиничної сили $\bar{x}_1 = 1$.

Визначаємо реакції опор від розподіленого навантаження q і будуємо епюру згинальних моментів (M_p).

$$\sum P_{гор} = 0\,; \quad H_A - qh = 0; \quad H_A = qh = 30 \text{ кН};$$

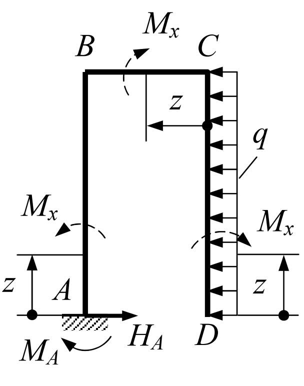
$$\sum P_{вер} = 0\,; \quad R_A = 0;$$

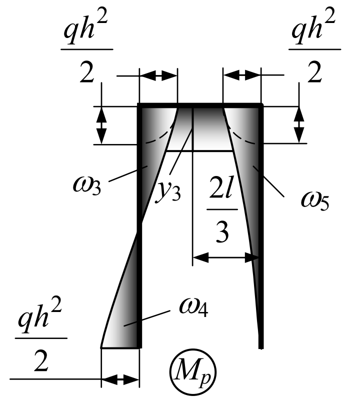
$$\sum M_A = 0\,; \quad M_A - q \cdot h \cdot \frac{h}{2} = 0\,; \quad M_A = \frac{ql^2}{2} = 30 \text{ кН·м.}$$

Ділянка DC: $0 \le z \le h$. $\quad M_x = -q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = -\frac{qz^2}{2}$.

Ділянка BC: $0 \le z \le l$. $\quad M_x = -\frac{qh^2}{2} = 30$ кН·м$= const$.

Ділянка AB: $0 \le z \le h$. $\quad M_x = M_A - H_A \cdot z$.

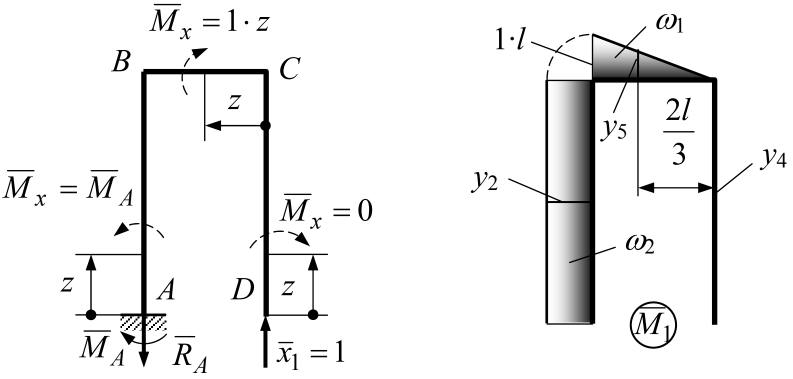




Визначаємо реакції опор від одиничної сили $\bar{x}_1 = 1$ і будуємо епюру згинальних моментів $\overline{M}_1$.

$$\sum P_{вер} = 0; \quad \overline{R}_A - \bar{x}_1 = 0; \quad \overline{R}_A = 1; \quad \sum P_{гор} = 0; \quad \overline{H}_A = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad \overline{M}_A - \bar{x}_1 \cdot l = 0; \quad \overline{M}_A = 1 \cdot l.$$



6.2.3 *Визначаємо головний коефіцієнт δ_{11} і вільний член Δ_{1p}*

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x}(\omega_1 \cdot y_1 + \omega_2 \cdot y_2) = \frac{l^2}{EI_x}\left(\frac{l}{3} + h\right);$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot l = \frac{1}{2} l^2; \quad y_1 = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot l = \frac{2}{3} l;$$

$$\omega_2 = 1 \cdot l \cdot h = lh; \quad y_2 = 1 \cdot l = l.$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EI_x}(\omega_1 \cdot y_3 + \omega_3 \cdot y_2 + \omega_4 \cdot y_2 + \omega_5 \cdot y_4) = -\frac{gh^2 l^2}{4EI_x};$$

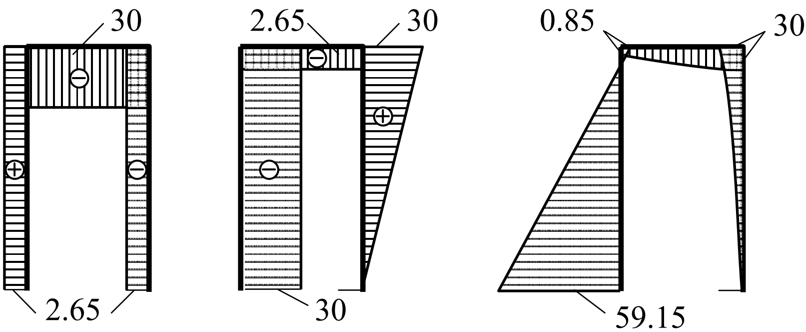
$$y_3 = -\frac{gh^2}{2}; \quad \omega_3 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{gh^2}{2} \cdot \frac{h}{2} = -\frac{gh^3}{8};$$

$$\omega_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{gh^2}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{gh^3}{8}; \quad y_4 = 0; \quad \omega_5 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{gh^2}{2} \cdot h = -\frac{gh^3}{6}.$$

Визначаємо невідому реакцію x_1 усунутого зв'язку

$$x_1 = -\frac{-gh^2 l^2}{4l^2\left(\frac{l}{3} + h\right)} = \frac{15 \cdot 2^2}{4 \cdot \left(\cdot \frac{11}{3} + 2\right)} = 2.65 \quad \text{кН.}$$

6.2.4 *Будуємо остаточні епюри В.С.Ф.*



Епюра N, кН Епюра Q_y, кН Епюра M_x, кН·м

Проаналізувавши епюру M_x, знаходимо, що $M_{x_{max}}$=|59.15| кН·м. За умовою міцності по нормальним напруженням визначаємо сторону квадратного перерізу елементів рами

$$\sigma_{max} = \frac{M_{x_{max}}}{W_x} \le [\sigma]; \quad W_x = \frac{a^3}{6};$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{6M_{x_{max}}}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 59.15 \cdot 10^{-3}}{160}} = 0.13 \text{ м=13 см.}$$

[1, С. 397−404; 3, С. 461−479]

7 РОЗРАХУНКИ НА СТІЙКІСТЬ ТИСНУТИХ СТРИЖНІВ

7.1 Умова задачі

Сталевий стержень, довжиною l, стискається силою P.

Необхідно:

а) знайти розміри поперечного перерізу при допустимому напруженні $[\sigma]$=160 МПа (розрахунки виконувати послідовними наближеннями);

б) знайти критичну силу і коефіцієнт запасу стійкості.

Розрахункові схеми і вихідні дані наведені на рисунку 7.1 і 7.2 та в таблиці 7.1.

Таблиця 7.1 − Вихідні дані

№ рядка	P, кН	l, м	Схема закріплення
1	100	2.1	**1**
2	200	2.2	
3	300	2.3	**2**
4	400	2.4	
5	500	2.5	**3**
6	600	2.6	
7	700	2.7	**4**
8	800	2.8	
9	900	2.9	**5**
0	1000	3.0	

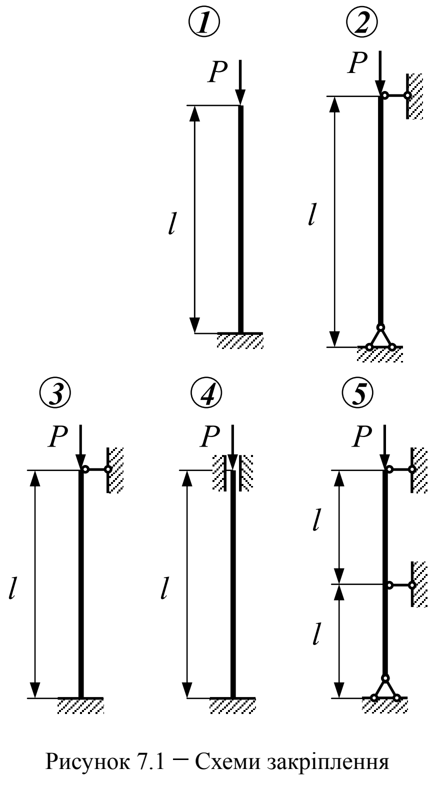


Рисунок 7.1 − Схеми закріплення

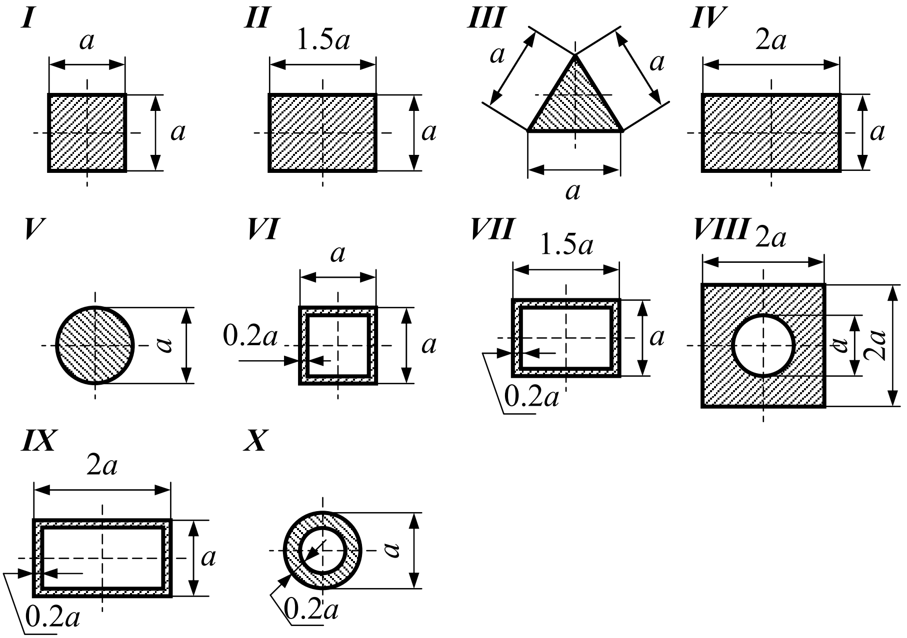
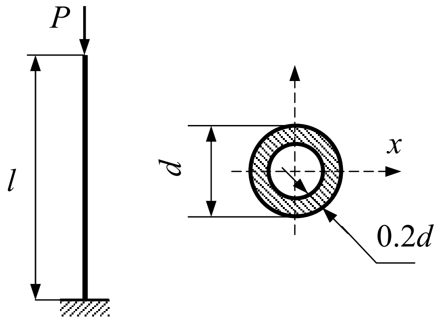


Рисунок 7.2 – Види поперечних перерізів стержня

7.2 Приклад розрахунку



Вихідні дані: P=200 кН;
l=2.1 м;
$E=2\cdot10^5$ МПа;
$[\sigma]$=160 МПа.

Розміри поперечного перерізу визначаємо з умови стійкості

$$\sigma_c = \frac{P}{F} = \varphi \cdot [\sigma].$$

Розв’язуємо задачу методом послідовних наближень.

Коефіцієнт зменшення допустимого напруження для першого наближення приймаємо 0.5, тобто середнє значення $0 \le \varphi \le 1$.

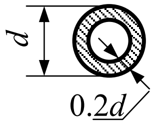
7.2.1 ***Перше наближення:*** $\varphi_1 = 0.5$.

7.2.1.1 *Визначення розмірів поперечного перерізу*

З одного боку площа поперечного перерізу визначається з умови стійкості

$$F = \frac{P}{\varphi_1[\sigma]}; \qquad F = \frac{200 \cdot 10^3}{0.5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 25 \text{ см}^2.$$

З іншого боку площа поперечного перерізу розраховується як площа кільцевого перерізу



$$F = \frac{\pi d^2}{4} - \frac{\pi}{4}(d - 2 \cdot 0.2d)^2 = 0.160 \cdot \pi d^2.$$

Тоді $$d = \sqrt{\frac{F}{0.16\pi}} = \sqrt{\frac{25}{0.16\pi}} = 7.05 \text{ см}.$$

7.2.1.2 *Розрахунок гнучкості стержня і моменту інерції*

Визначаємо гнучкість стержня $\lambda = \dfrac{\mu l}{i_{min}}$ і мінімальний радіус інерції $i_{min} = \sqrt{\dfrac{I_{min}}{F}}$, а також мінімальний момент інерції кільцевого перерізу

$$I_{min} = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{\pi}{64}(d - 0.4d)^4 = 13.6 \cdot 10^{-3} \pi d^4.$$

Тоді $$i_{min} = \sqrt{\frac{13.6 \cdot 10^{-3} \pi d^4}{0.16 \pi d^2}} = 0.292d = 0.292 \cdot 7.05 = 2.06 \text{ см};$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}} = \frac{2 \cdot 210}{2.06} = 204.$$

7.2.1.3 *Обираємо коефіцієнт зменшення допустимого напруження* з таблиць залежності φ=$f(\lambda)$: $\varphi_1' = 0.19$.

7.2.1.4 *Виконуємо перевірку на стійкість*

$$\sigma = \frac{P}{\varphi_1' \cdot F} = \frac{200 \cdot 10^3}{0.19 \cdot 2.5 \cdot 10^{-3}} = 421 \text{ МПа} > 160 \text{ МПа.}$$

Оскільки напруження значно перевищує допустиме, то необхідно зробити ще одне наближення.

7.2.2 *Друге наближення*

7.2.2.1 *Розрахуємо коефіцієнт зменшення напруження* як середньо арифметичне

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0.5 + 0.19}{2} = 0.345 .$$

7.2.2.2 *Визначення розмірів поперечного перерізу*

Відповідно перерахуємо площу, діаметр труби, мінімальний радіус інерції

$$F = \frac{P}{\varphi_2 \cdot [\sigma]} = \frac{200 \cdot 10^3}{0.345 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3.62 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2\text{=36.2 см}^2;$$

$$d = \sqrt{\frac{F}{0.16\pi}} = \sqrt{\frac{36.2}{0.16\pi}} = 8.49 \text{ см;}$$

$$i_{min}\text{=0.292}d\text{=2.48 см.}$$

7.2.2.3 *Визначаємо гнучкість стержня*

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}} = \frac{2 \cdot 210}{2.48} \cong 170 .$$

7.2.2.4 *Обираємо новий коефіцієнт зменшення допустимого напруження* з таблиць залежності $\varphi=f(\lambda)$: $\varphi_2' = 0.26$.

7.2.2.5 *Виконуємо наступну перевірку на стійкість*

$$\sigma_c = \frac{P}{\varphi_2' \cdot F} = \frac{200 \cdot 10^3}{0.26 \cdot 3.62 \cdot 10^{-3}} = 212 \text{ МПа} > 160 \text{ МПа}.$$

Напруження перевищує допустиме на 32.5%, тому знову переходимо до наступного наближення.

7.2.3 Наступне наближення

7.2.3.1 *Розрахуємо коефіцієнт зменшення напруження, розмір поперечного перерізу та гнучкість стержня*

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0.345 + 0.26}{2} = 0.303;$$

$$F = \frac{P}{\varphi_3 \cdot [\omega]} = \frac{200 \cdot 10^3}{0.303 \cdot 160 \cdot 10^6} = 4.13 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 4.13 \text{ см}^2;$$

$$d = \sqrt{\frac{F}{160\pi}} = \sqrt{\frac{41.3}{0.16\pi}} = 9.06 \text{ см.} \quad i_{min} = 0.292 \cdot 9.06 = 2.64 \text{ см.}$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}} = \frac{2 \cdot 210}{2.64} \cong 159.$$

7.2.3.2 *Обираємо коефіцієнт зменшення допустимого напруження* з таблиць залежності $\varphi=f(\lambda)$

λ	φ
150	0.32
160	0.29

Більш точно табличний коефіцієнт φ визначаємо за допомогою інтерполяції

$$\varphi_3 = 0.32 - \frac{0.32 - 0.29}{10} \cdot 9 = 0.293.$$

7.2.3.3 *Виконуємо наступну перевірку на стійкість*

$$\sigma = \frac{P}{\varphi_3' \cdot F} = \frac{200 \cdot 10^3}{0.293 \cdot 4.13 \cdot 10^{-3}} = 165 \text{ МПа}.$$

7.2.3.4 *Підраховуємо відносну похибку*

$$\delta = \frac{|160 - 165|}{160} \cdot 100\% = 3\%.$$

Похибка розрахунків задовільна і не перевищує ± 5%.

7.2.4 *Розрахунок критичної сили та коефіцієнта запасу стійкості*

Оскільки $\lambda > \lambda_{гр}$=100, то критичну силу розраховуємо за формулою Ейлера

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot F \cdot i_{min}^2}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \cdot F,$$

де $I_{min} = i_{min}^2 \cdot F$;

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}}.$$

Тоді $$P_{кр} = \frac{3.14^2 \cdot 2 \cdot 10^8}{159^2} \cdot 4.13 \cdot 10^{-3} = 322.14.$$

Коефіцієнт запасу стійкості

$$n_{ст} = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{322.14}{200} = 1.61.$$

[1, С. 502−5064; 2, С. 46−471; 3, С. 492−496].

Типові задачі до розрахунково-графічної роботи №4

8 РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ІНЕРЦІЇ

8.1 Умова задачі

Валик і жорстко з'єднаний з ним ломаний стержень, такого ж поперечного перерізу, обертається з постійною швидкістю навколо осі AB.

Необхідно:

а) побудувати епюру M_x від дії сил інерції, що виникають на вертикальній (CD) і горизонтальній (DE) ділянках ломаного стержня;

б) знайти допустиме число обертів валика (AB) за хвилину, при допустимому навантаженні $[\sigma]$=100 МПа і γ=78 кН/м^3.

Розрахункові схеми і вихідні дані наведені на рисунку 8.1 і в таблиці 8.1.

Таблиця 8.1 − Вихідні дані

№ рядка	l, см	Діаметр валика d, мм	№ рядка	l, см	Діаметр валика d, мм
1	15	21	***6***	40	16
2	20	22	***7***	45	17
3	25	23	***8***	50	18
4	30	24	***9***	55	19
5	35	25	***0***	60	20

Примітки. 1. Для спрощення обчислень рекомендується виконувати їх спочатку у загальному вигляді, позначаючи інтенсивність сил інерції через q.

2. Рівнодійні сил інерції на горизонтальних і вертикальних ділянках, опорні реакції, ординати епюри M_x потрібно виразити через ql і ql^2.

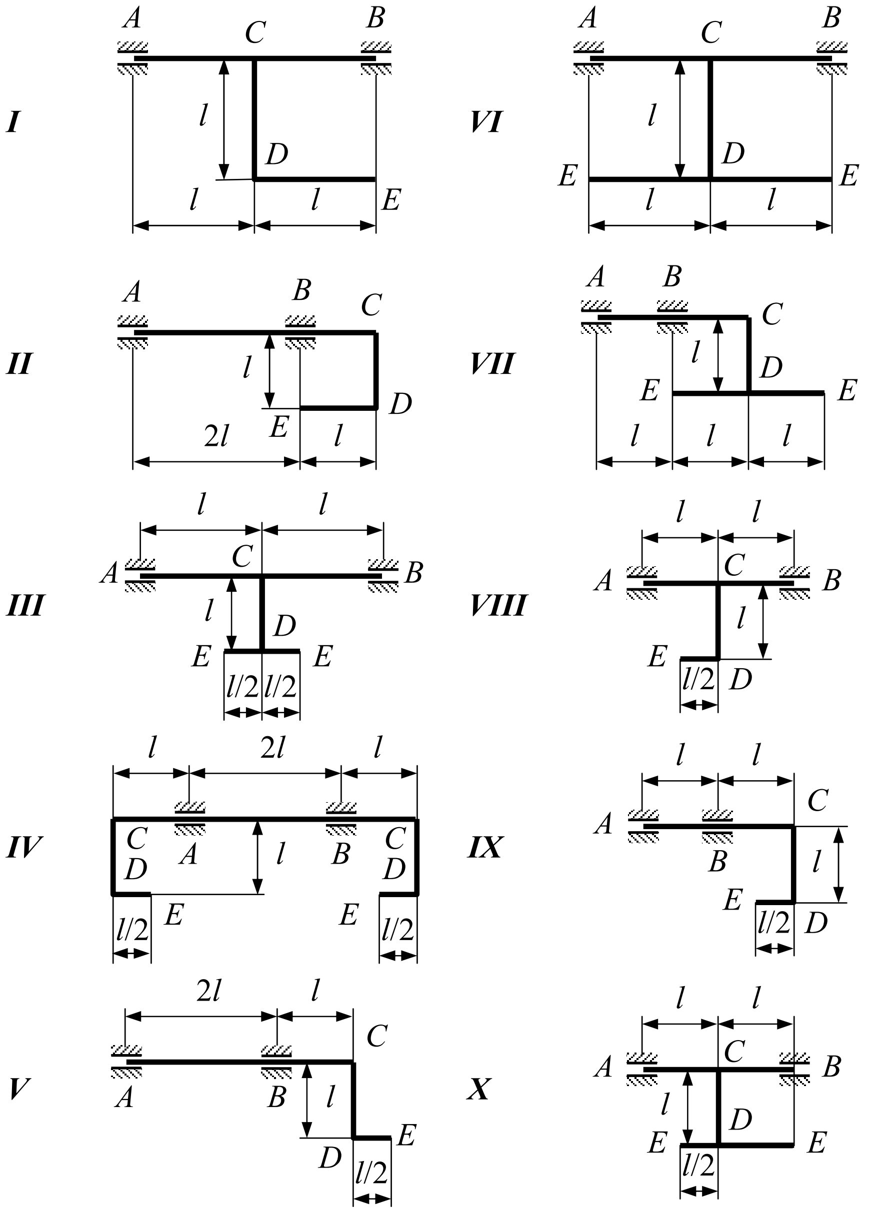
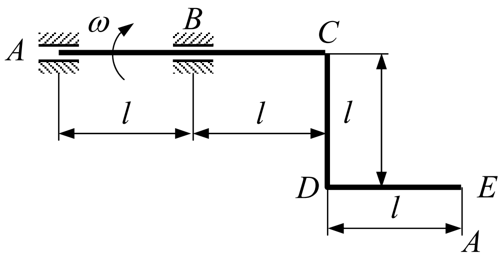


Рисунок 8.1 – Розрахункові схеми

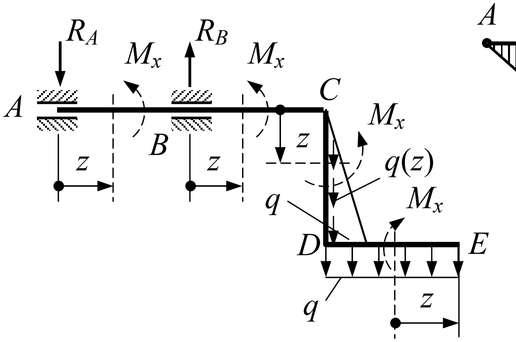
8.2 Приклад розрахунку

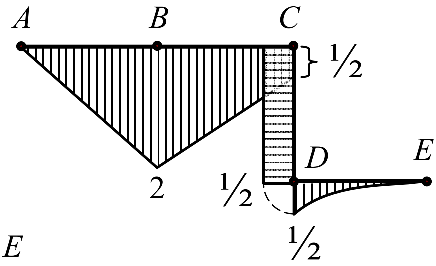


Вихідні дані:

[σ]=100 МПа;
γ=78 кН/м^3;
l=40 см;
d=20·мм.

8.2.1 *Встановлюємо закон зміни інтенсивності сил інерції і визначаємо реакції опор*





Епюра M_x, (ql^2)

Ділянка CD: $0 \le z \le l$.

$$q(z) = \frac{\gamma \cdot F}{g} \omega^2 \cdot z$$ → *лінійний закон.*

При z=0; → $q(0)$=0; z=l; → $q(l) = \frac{\gamma \cdot F}{g} \omega^2 \cdot l$.

Ділянки DE: Всі точки стержня знаходяться на однаковій відстані l від осі обертання, тому

$$q_{DE} = q = \frac{\gamma \cdot F}{g} \omega^2 \cdot l .$$

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot l - \frac{1}{2} ql \cdot 2l - ql \cdot \frac{5}{2} l = 0; \quad R_B = \frac{7}{2} ql;$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A \cdot l - \frac{1}{2} ql \cdot l - ql \cdot \frac{3}{2} l = 0; \quad R_A = 2ql.$$

Перевірка: $\sum P_{вер} = 0; \quad R_B - R_A - ql - \frac{1}{2} ql = 0;$

$$\frac{7}{2} ql - 2ql - \frac{3}{2} ql = 0.$$

8.2.2 ***Визначаємо згинальні моменти на кожній ділянці***

Ділянка ED: $0 \le z \le l$.

$M_x + qz \cdot \frac{z}{2}; \quad M_x = -\frac{qz^2}{2}$ ➔ *квадратична парабола.*

При $z=0$ ➔ $M_x=0$; при $z=l$ ➔ $M_x = -\frac{ql^2}{2}$ ➔ *епюру будуємо на стиснутих волокнах.*

Ділянка CD: $0 \le z \le l$.

$$M_x - R_B \cdot l + R_A \cdot 2l = 0; \quad M_x = \frac{7}{2} ql^2 - 4ql^2 = -\frac{1}{2} ql^2 \rightarrow const.$$

Ділянка AB: $0 \le z \le l$.

$M_x = -R_A \cdot z$. При $z=0$ ➔ $M_x=0$; при $z=l$ ➔ $M_x = -2ql^2$.

Ділянка BC: $0 \le z \le l$.

$M_x = R_B \cdot z - R_A (l + z)$. При $z=0$ ➔ $M_x = -2ql^2$; при $z=l$ ➔ $M_x = -\frac{1}{2} ql^2$.

За одержаними даними будуємо епюру M_x, звідки знаходимо максимальний момент

$$M_{x_{max}} = \left|2ql^2\right|.$$

8.2.3 ***Із умови міцності визначаємо допустиме число обертів валика***

$$\sigma_{max} = \frac{M_{x_{max}}}{W_x} \le [\sigma].$$

Враховуючи, що $\quad q = \frac{\gamma F}{g}\omega^2 l^3 \quad W_x = \frac{\pi d^3}{32}; \quad F = \frac{\pi d^2}{4},$

запишемо $\quad M_{x_{max}} = \frac{2\gamma\pi d^2}{4g}\omega^2 l^3.$

Тоді отримуємо

$$\sigma_{max} = \frac{2\gamma}{g}\cdot\frac{\pi d^2}{4}\cdot\omega^2 l^3\cdot\frac{32}{\pi d^3} = \frac{16\gamma\omega^2 l^3}{gd} \le [\sigma],$$

звідки $[\omega] = \sqrt{\frac{g\cdot d\cdot[\sigma]}{16\cdot\gamma\cdot l^3}} = \sqrt{\frac{9.81\cdot 0.02\cdot 100}{16\cdot 78\cdot 10^{-3}\cdot 0.4^3}} = 15.67$ с$^{-1}$.

Допустиме число обертів валика

$$[n] = \frac{[\omega]\cdot 30}{\pi} = \frac{15.67\cdot 30}{\pi} = 149.67 \text{ об./хв.}$$

[1, С. 605−610; 2, С. 52−53; 3, С. 534−537].

9 ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ В ДВОТАВРОВИХ БАЛКАХ ПРИ УДАРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

9.1 Умова задачі

На двотаврову балку, яка закріплена на двох жорстких опорах, з висоти h падає вантаж P.

Необхідно:

а) визначити найбільше напруження в небезпечному перерізі балки;

б) розв'язати аналогічну задачу за умови, що праву опору заміняємо пружиною, піддатливість якої дорівнює α;

в) порівняти отримані результати.

Розрахункові схеми і вихідні дані наведені на рисунку 9.1 і в таблиці 9.1.

Таблиця 9.1 − Вихідні дані

№ рядка	№ двотавра	l, м	P, Н	h, см	$\alpha \cdot 10^3$, м/кН
1	20	2.1	1100	11	21
2	20*а*	2.2	1200	12	22
3	24	2.3	300	3	23
4	24*а*	2.4	400	4	24
5	27	2.5	500	5	25
6	27*а*	2.6	600	6	26
7	30	2.7	700	7	27
8	30*а*	2.8	800	8	28
9	33	2.9	900	9	29
0	36	3.0	1000	10	30

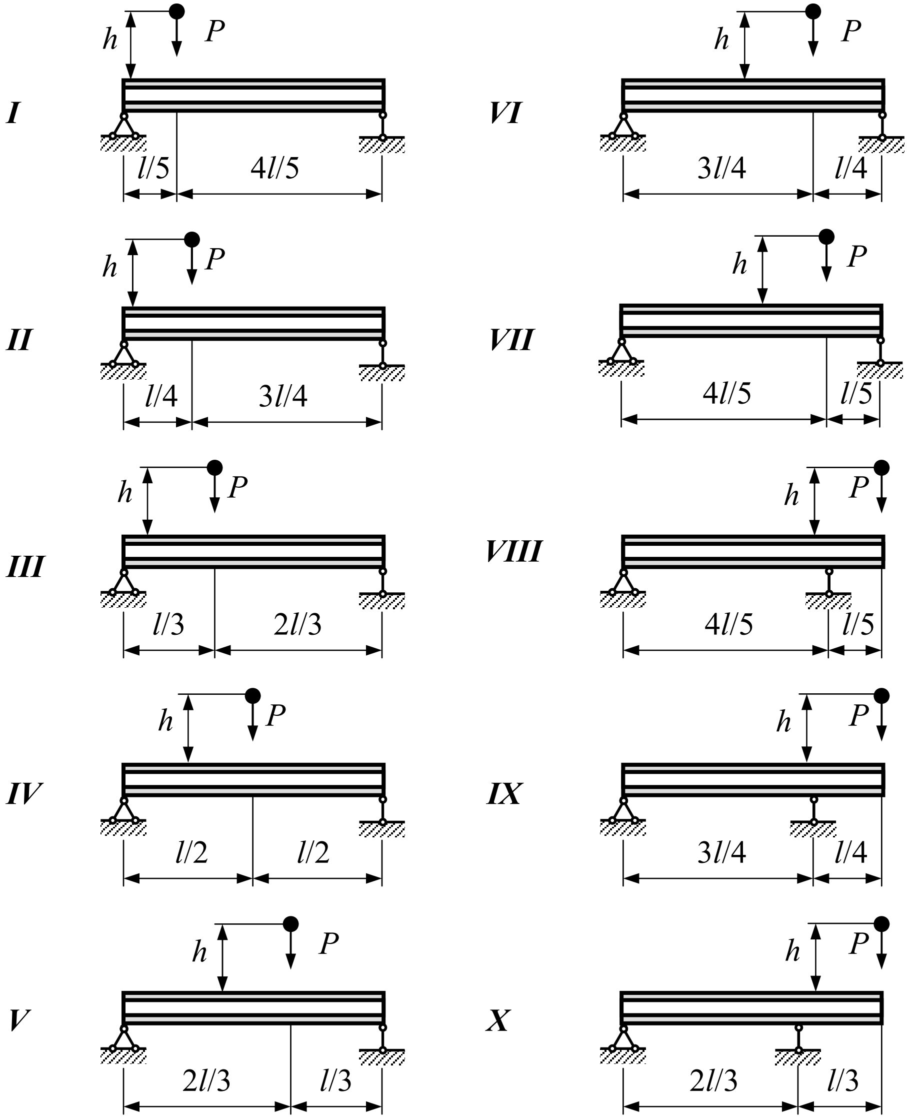
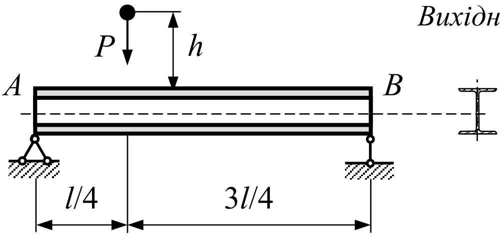
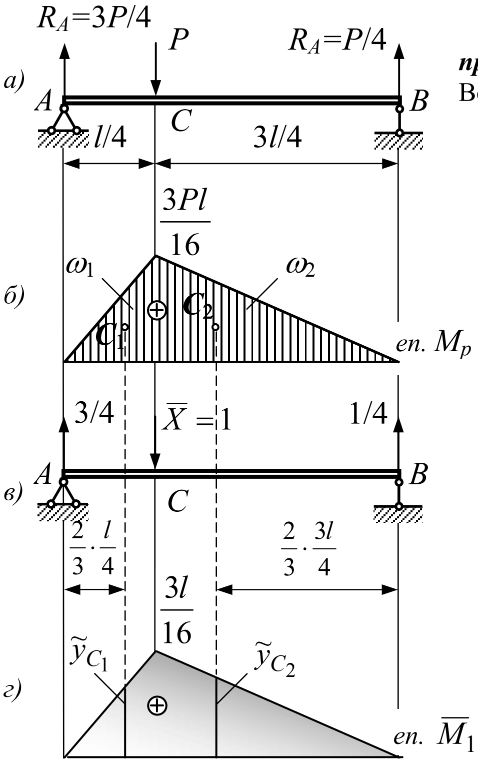


Рисунок 9.1 ─ Розрахункові схеми

9.2 Приклад розрахунку



Вихідні дані: двотавр №20;
h=11 см; l=2.2 м;
P=800 Н;
J_x=1810 см^4;
E=2·10^{11} Па;
α=22·10^{-3} м/кН;
W_x=181 см$^{-3}$.



9.2.1 *Визначаємо статичний прогин в точці удару* (методом Верещагіна)

9.2.1.1 *Визначаємо реакції опор*

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot l - P\frac{l}{4} = 0;$$

$$R_B = \frac{P}{4} = 200\,\text{Н};$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A \cdot l - \frac{3}{4}Pl = 0;$$

$$R_A = \frac{3}{4}P = 600\,\text{Н}.$$

Перевірка: $\sum P_y = 0;$

$$R_B - P + R_A = 0;$$

$$\frac{1}{4}P - P + \frac{3}{4}P = 0.$$

9.2.1.2 *Будуємо епюри згинальних моментів від дії реального навантаження та одиничної сили і визначаємо площі* ω_1, ω_2 *та ординати* $\tilde{y}_{C_1}$, $\tilde{y}_{C_2}$

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}l\cdot\frac{3}{16}Pl = \frac{3}{128}Pl^2; \quad \omega_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}l\cdot\frac{3}{16}Pl = \frac{9}{128}Pl^2;$$

$$\tilde{y}_{C_1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{16} l = \frac{1}{8} l; \quad \tilde{y}_{C_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{16} l = \frac{1}{8} l.$$

9.2.1.3 *Визначаємо статичний прогин*

$$\Delta_{cm} = \frac{\omega_1 \cdot \tilde{y}_{C_1}}{EI_x} + \frac{\omega_2 \cdot \tilde{y}_{C_2}}{EI_x} = \frac{1}{EI_x}\left(\frac{3}{128} Pl^2 \cdot \frac{1}{8} l + \frac{9}{128} Pl^2 \cdot \frac{1}{8} l \right) =$$

$$= \frac{3}{256} \cdot \frac{Pl^3}{EI_x} = \frac{3}{256} \cdot \frac{800 \cdot 2.2^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1810 \cdot 10^{-8}} = 2.757 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

9.2.1.4 *Визначаємо коефіцієнт динамічності*

$$k_\partial = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0.11}{2.757 \cdot 10^{-5}}} = 90.323.$$

9.2.1.5 *Визначаємо максимальні статичні напруження*

$$\sigma_{cm} = \frac{M_x^{max}}{W_x} = \frac{3 \cdot P \cdot l}{16 \cdot W_x} = \frac{3 \cdot 800 \cdot 10^{-6} \cdot 2.2}{16 \cdot 181 \cdot 10^{-6}} = 1.82 \text{ Мпа.}$$

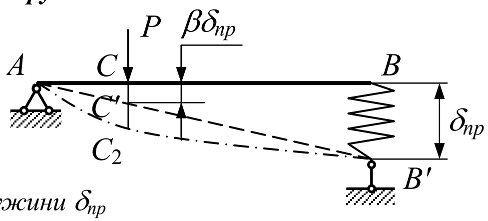
9.2.1.6 *Визначаємо максимальні динамічні напруження*

$$\sigma_\partial = k_\partial \cdot \sigma_{cm} = 90.323 \cdot 1.82 = 164.6 \text{ Мпа.}$$

9.2.2 *Замінюємо праву опору пружиною*

$$\Delta'_{cm} = \Delta_{cm} + \beta \cdot \delta_{cm},$$

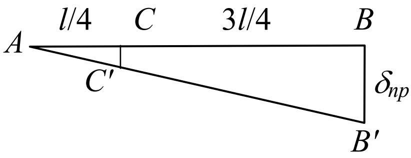
де $C' \cdot C_2 = \Delta_{cm}$.



9.2.2.1 *Визначаємо осадку пружини* δ_{np}

$$\delta_{np} = BB' = R_B \cdot \alpha = \frac{P}{4} \cdot \alpha = \frac{800}{4} \cdot 22 \cdot 10^{-3} = 0.0044 \text{ м.}$$

9.2.2.2 *Визначаємо коефіцієнт* β, який встановлює співвідношення між осадкою пружини та переміщенням точки прикладення сили P.



З подібності трикутників ACC' та ABB' маємо

$$\frac{CC'}{AC} = \frac{BB'}{AB} \Rightarrow \frac{\beta \cdot \delta_{пр}}{\frac{1}{4}l} = \frac{\delta_{пр}}{l}; \quad \beta = \frac{1}{4} = 0.25;$$

$$\Delta'_{ст} = \Delta_{ст} + \beta \cdot \delta_{пр} = 2.757 \cdot 10^{-5} + 0.25 \cdot 0.0044 = 1.128 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

9.2.2.3 *Визначаємо коефіцєнт динамічності для другої схеми закріплення*

$$k'_{д} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta'_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0.11}{1.128 \cdot 10^{-5}}} = 15.0.$$

9.2.2.4 *Визначаємо максимальні динамічні напруження*

$$\sigma_{д} = k'_{д} \cdot \sigma_{ст} = 15.0 \cdot 1.82 = 27.3 \text{ Мпа.}$$

9.2.3 *Порівнюємо отримані результати*

$$K = \frac{\sigma_{д}}{\sigma'_{д}} = \frac{164.6}{27.3} = 6.02\,.$$

9.2.4 *Висновок*

Максимальні напруження при заміні жорсткої опори пружиною (або іншим пружним елементом з таким же коефіцієнтом α) в шість разів менші ніж без пружини.

[1, С. 605−610; 2, С. 49−51; 3, С. 537−540].

10 ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ В ДВОТАВРОВИХ БАЛКАХ ПРИ КОЛИВАННІ

10.1 Умова задачі

На двох балках двотаврового перерізу встановлено двигун вагою Q, який робить n обертів за хвилину. Відцентрова сила інерції, яка виникає внаслідок незрівноваженності частин двигуна, дорівнює H.

Власну вагу балок і сили опору середовища можна не враховувати.

Необхідно:

а) визначити частоту власних коливань ω_0;

б) визначити частоту вимушених коливань ω;

в) визначити коефіцієнт зростання коливань β, який визначається формулою $\beta = \dfrac{1}{1-\left(\omega/\omega_0\right)^2}$ [2];

г) визначити динамічний коефіцієнт $k_д = 1 + \dfrac{\Delta_д}{\Delta_{ст}}\beta = 1 + \dfrac{H}{Q}\beta$;

д) визначити найбільше нормальне напруження в балках $\sigma_д = k_д \cdot \sigma_{ст}$.

Розрахункові схеми і вихідні дані наведені на рисунку 10.1 і в таблиці 10.1.

Таблиця 10.1 − Вихідні дані

№ рядка	№ дво-тавра	l, м	Q, кН	H, кН	n, об/хв	№ рядка	№ дво-тавра	l, м	Q, кН	H, кН	n, об/хв
1	16	1.1	11	11	400	***6***	22	1.6	16	6	650
2	18	1.2	12	2	450	***7***	24а	1.7	17	7	700
3	20а	1.3	13	3	500	***8***	24	1.8	18	8	750
4	20	1.4	14	4	550	***9***	27а	1.9	19	9	800
5	22а	1.5	15	5	600	***0***	27	2.0	20	10	850

[2] Якщо коефіцієнт β буде від'ємним, то в подальших розрахунках слід враховувати його абсолютну величину.

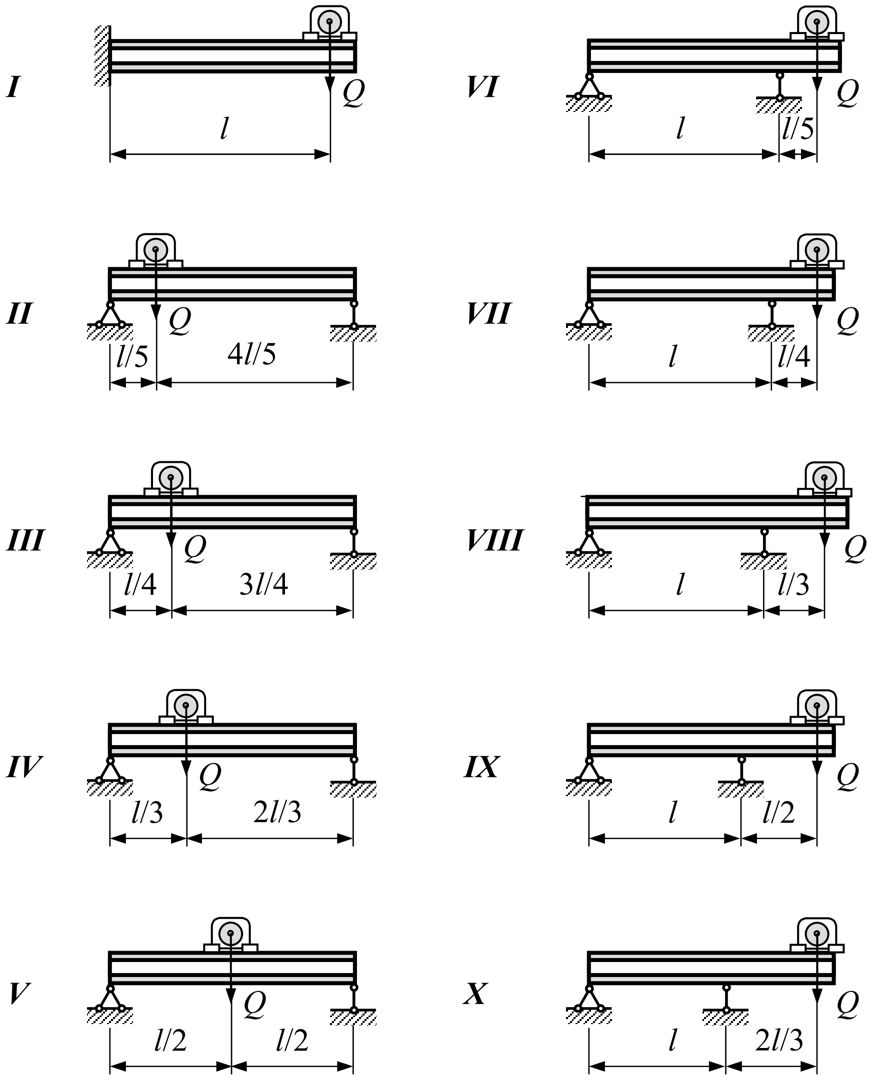
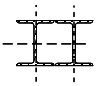


Рисунок 10.1 – Розрахункові схеми

10.2 Приклад розрахунку

Вихідні дані: l=2.0 м; Q=12 кН; H=11 кН; n=850 об/хв; двотавр №16; I_x=873 см^4; W_x=109 см^3.



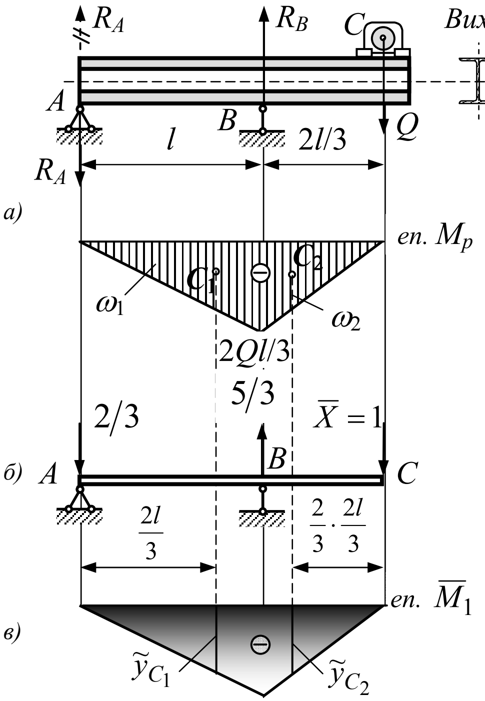


Рисунок 10.2 – Розрахункова схема, епюри M_p, M_1

10.2.1 *Визначаємо реакції опор* (рис. 10.2, *а*)

$$\sum M_A = 0;$$

$$R_B \cdot l - Q\left(l + \frac{2}{3}l\right) = 0;$$

$$R_B = \frac{5}{3}Q;$$

$$\sum M_B = 0;$$

$$R_A \cdot l + Q\frac{2}{3}l = 0;$$

$$R_A = -\frac{2}{3}Q.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = 0; \quad R_A + Q + R_B = 0; \quad \frac{2}{3}Q + Q - \frac{5}{3}Q = 0.$$

10.2.2 *Знаходимо частоту власних коливань*

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}},$$

де g – прискорення вільного падіння;

Δ_{cm} – переміщення від статично діючої сили Q, яке визначаємо методом Верещагіна.

Для цього будуємо епюри згинальних моментів від дії реального навантаження та одиничної сили (рис. 10.2; *а*, *в*) і обчислюємо площі епюр M_p на ділянках *AB* та *BC* (ω_1, ω_2), а також ординати моментів $\overline{y}_{C_1}$ і $\overline{y}_{C_2}$ напроти центрів ваги C_1, C_2

$$\omega_1 = \frac{1}{2} l \cdot \frac{2}{3} Ql = \frac{1}{3} Ql^2; \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} l \cdot \frac{2}{3} Ql = \frac{2}{9} Ql^2;$$

$$\widetilde{y}_{C_1} = \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{4}{9} l; \quad \widetilde{y}_{C_2} = \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{4}{9} l.$$

Тоді

$$\Delta_{cm} = \frac{\omega_1 \cdot \widetilde{y}_{C_1}}{EI_x} + \frac{\omega_2 \cdot \widetilde{y}_{C_2}}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{3} Ql^2 \cdot \frac{4}{9} l + \frac{2}{9} Ql^2 \cdot \frac{4}{9} l \right) =$$

$$= \frac{20}{81} \cdot \frac{Ql^3}{EI_x} = \frac{20 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 2^3}{81 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 0.0136 \quad \text{м};$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{9.81}{0.0136}} = 26.86 \ \text{с}^{-1}.$$

10.2.3 ***Знаходимо частоту вимушених коливань***

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 850}{30} = 89.01 \ \text{с}^{-1}.$$

10.2.4 ***Визначаємо коефіцієнт зростання коливань***

$$|\beta| = \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right|} = \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{89.01}{26.86} \right)^2 \right|} = 0.1.$$

10.2.5 ***Визначаємо динамічний коефіцієнт***

$$k_{\partial} = 1 + \beta \frac{H}{Q} = 1 + 0.1 \cdot \frac{11}{12} = 1.092\,.$$

10.2.6 ***Визначаємо динамічні напруженн***

$$\sigma_{\partial} = \sigma_{cm} \cdot k_{\partial} = \frac{M_{x_{max}}}{2W_x} \cdot k_{\partial} = \frac{\frac{2}{3}Ql}{2W_x} \cdot k_{\partial} =$$

$$= \frac{2 \cdot 12 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 109 \cdot 10^{-6}} \cdot 1.092 = 80.15 \quad \text{МПа.}$$

[1, С. 537−538; 2, С. 49−50; 2, С. 523−533;].

ЛІТЕРАТУРА

1. Опір матеріалів. Підручник /Г.С. Писаренко, О.А. Квітка, Е.С. Уманський; За ред. Г.С. Писаренка. − К.: Вища школа, 2004. − 655 с.

2. Сопротивление материалов. Методические указания и контрольные задачи для студентов-заочников всех специальностей высших учебных заведений. / А. В. Дарков, Б. Н. Кутуков. − М.: Высш. шк., 1985. − 56 с.

3. Дарков А. В., Шпиро Г. С. Сопротивление материалов: Учебник для техн. вузов. − 5-е узд. − М.: Высш. шк., 1989. − 624 с.

4. Методичні вказівки для самостійної роботи і перевірки рівня засвоєння курсу „Опір матеріалів” з використанням програмного комплексу для студентів всіх спеціальностей денної форми навчання. /А. О. Будник, В. Г. Шевченко, С. Л. Рягін. − Запоріжжя: ЗНТУ, 2004. − 15 с.